

УДК 004.9:539.1

**РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ “КОНВЕКЦИЯ-ДИФфуЗИЯ” ДЛЯ
МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ
ГАЗАХ И ПЛАЗМЕ.**

Лебо И.Г., д.ф-м.н., профессор, E-mail: lebo@mirea.ru

Симаков А.И., аспирант, E-mail: elkmar@newmail.ru

МГТУ МИРЭА, Москва, Россия

Аннотация. С помощью разработанной авторами программы “Cooler” численно решается уравнение “конвекции-диффузии” в двумерной геометрии (переменные x , y , t). Предложено частное аналитическое решение этого уравнения. Проведено тестирование программы “Cooler” и получены результаты для случаев граничных условий трех типов.

Ключевые слова. Численное моделирование; конвекция-диффузия.

**SOLUTION OF THE EQUATION “CONVECTION-DIFFUSION” FOR
MODELLING OF HEAT TRANSFER IN HIGH TEMPERATURE GASES AND
PLASMA.**

Lebo I.G., D.of Sci., the professor, E-mail: lebo@mirea.ru

Simakov A.I., the postgraduate student, E-mail: elkmar@newmail.ru

MSTU MIREA, Moscow, Russia

Abstract. Equation “convection-diffusion” is solved numerically using the program “Cooler” developed by the authors in 2D geometry (variables x , y , t). Particular solution of this equation is proposed. The program “Cooler” is tested and results are obtained for three different types of boundary conditions.

Keywords. Numerical simulation, convection-diffusion.

Введение.

Одним из важных уравнений математической физики является уравнение “конвекции-диффузии”, которое широко используется для описания процессов теплопередачи в подвижных жидких и газообразных средах [1].

Уравнение конвекции-диффузии в векторной форме можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(\vec{v}\nabla T) + \nabla \left(\frac{\kappa}{c_v \rho} \nabla T \right) + F \quad (1)$$

где \vec{v} – вектор скорости, κ – теплопроводность, c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме, ρ – плотность среды, F – внешний источник, T – искомая функция (например, температура в точке (x, y, z) в момент времени t). Это – уравнение в частных производных второго порядка, причем первый член в правой части описывает

снос искомой термодинамической функции (например, температуры) с потоком, второй член – распространение тепла за счет термодиффузии (теплопроводности). В том случае, если коэффициенты $\kappa(T)$ или $c_V(T)$ сами зависят от искомой функции T , уравнение (1) становится нелинейным. Наряду с задачами теплопередачи в сложных средах подобное уравнение используется для описания распределения солености воды, распространения загрязнений и других задачах математической физики.

В общем случае уравнение (1) не имеет аналитических решений, поэтому приходится разрабатывать алгоритмы и программы для моделирования соответствующих процессов.

В [2] опубликованы предварительные результаты расчетов, выполненных по программе “Cooler”. В настоящей статье приводится методика расчетов и описание программы “Cooler”, созданной в МГТУ МИРЭА для решения уравнения (1) в двумерной постановке с учетом различных типов граничных условий. Найдено частное аналитическое решение уравнения (1) и приводятся результаты тестовых расчетов, демонстрирующих хорошую точность численных решений.

1. Разностная схема

Пусть $F=0$, $\kappa = \text{const}$, а размерность пространства равна двум (переменные x, y). Для обезразмеривания уравнения введем масштабы по пространству, температуре, скорости и времени ($L_0, T_0, v_0, t_0=L_0/v_0$), физический смысл этих масштабов будет следующим: L_0 – размер области, T_0 – начальная температура, v_0 – максимальная скорость. В обезразмеренной форме уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

где u, w – компоненты скорости по соответствующим направлениям, χ – безразмерный параметр, характеризующий свойства среды.

Для решения данного уравнения применялась следующая разностная продольно-поперечная схема с весами:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{T}_{ik} - T_{ik}}{\tau} = & -w_{ik} \sigma_1 \frac{\hat{T}_{ik+1} - \hat{T}_{ik-1}}{2h_y} - w_{ik} (1 - \sigma_1) \frac{T_{ik+1} - T_{ik-1}}{2h_y} - u_{ik} \frac{\overline{T}_{i+1k} - \overline{T}_{i-1k}}{2h_x} \\ & + \sigma_2 \chi \frac{\hat{T}_{ik+1} - 2\hat{T}_{ik} + \hat{T}_{ik-1}}{h_y^2} + (1 - \sigma_2) \chi \frac{T_{ik+1} - 2T_{ik} + T_{ik-1}}{h_y^2} + \chi \frac{\overline{T}_{i+1k} - 2\overline{T}_{ik} + \overline{T}_{i-1k}}{h_x^2} \end{aligned} \quad (3)$$

где T_{ik} – значение сеточной функции температуры на предыдущем временном слое, T_{ik} – значение температуры на промежуточном слое, \hat{T}_{ik} – значение температуры

на искомом слое, “ i ” – индекс вдоль направления OX , “ k ” – индекс вдоль направления OY .

Данная схема получилась путем сложения проходов вдоль оси OX и оси OY :

Вдоль оси OX –

$$\begin{aligned} \frac{\overline{T}_{ik} - T_{ik}}{\tau} = & -w_{ik}(1 - \sigma_{1y}) \frac{T_{ik+1} - T_{ik-1}}{2h_y} - u_{ik}\sigma_{1x} \frac{\overline{T}_{i+1k} - \overline{T}_{i-1k}}{2h_x} + (1 - \sigma_{2y})\chi \frac{T_{ik+1} - 2T_{ik} + T_{ik-1}}{h_y^2} \\ & + \chi\sigma_{2x} \frac{\overline{T}_{i+1k} - 2\overline{T}_{ik} + \overline{T}_{i-1k}}{h_x^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Вдоль оси OY –

$$\begin{aligned} \frac{\hat{T}_{ik} - \overline{T}_{ik}}{\tau} = & -w_{ik}\sigma_{1y} \frac{\hat{T}_{ik+1} - \hat{T}_{ik-1}}{2h_y} - u_{ik}(1 - \sigma_{1x}) \frac{\overline{T}_{i+1k} - \overline{T}_{i-1k}}{2h_x} + \sigma_{2y}\chi \frac{\hat{T}_{ik+1} - 2\hat{T}_{ik} + \hat{T}_{ik-1}}{h_y^2} \\ & + (1 - \sigma_{2x})\chi \frac{\overline{T}_{i+1k} - 2\overline{T}_{ik} + \overline{T}_{i-1k}}{h_x^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Весы позволяют при расчете выбрать между явной, неявной и явно-неявной схемой. Из [3] известно, что, вообще говоря, явные схемы условно устойчивы, тогда как неявные – безусловно устойчивы. Поэтому чтобы получить более точные результаты в расчетах, представленных в данной статье, использовалась неявная схема, то есть все σ были равны 1.

На характер решения оказывает влияние величина безразмерного параметра χ :

- 1) $\chi \gg 1$ – теплопроводный режим
- 2) $\chi \sim 1$ – промежуточный режим
- 3) $\chi \ll 1$ – конвективный режим

Следует учитывать, что возможно нарушение устойчивости разностной схемы (см. подробнее в [4,5])

Существует несколько типов граничных условий, в частности:

- 1) граничные условия первого рода – на границе области задается значение температуры;
- 2) граничные условия второго рода – на границе области задается значение тепловых потоков;
- 3) граничные условия третьего рода – теплообмен со средой происходит по закону Ньютона, то есть тепловой поток зависит от разности температуры на границе расчетной области и окружающей среды.

2. Тестовые задачи

Для решения уравнения конвекции-диффузии по описанной выше схеме была разработана программа «Cooler» на языке Fortran. В качестве основного расчетного

алгоритма используется метод прогонки. Было проведено несколько серий тестовых расчетов, чтобы убедиться в правильности используемых методов. В задачах, где исследовалась невязка (то есть суммарное отклонение расчетных решений от аналитических) использовались сетки 28x28, 54x54 и 108x108 (с учетом фиктивных ячеек, которые служат для задания граничных условий). Тесты 1 и 2 проводились для ситуации, когда $u=w=0$, то есть теплообмен происходил только за счет диффузии.

1 серия тестовых расчетов:

Рассмотрим решение задачи, которая имеет аналитическое решение. Само аналитическое решение имеет вид:

$$T = 1 + 10 \cdot \exp(-\lambda t) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \quad (6)$$

$$\text{где } \lambda = 2 \cdot \chi \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$$

При этом начальными условиями будет решение данного уравнения при $t=0$, а граничными условиями $T=1$ (то есть граничные условия первого рода). Для оценки правильности решения исследовалась невязка (рис. 1). Невязкой в вычислительной математике называют относительную погрешность; в данной статье она вычисляется по формуле

$$T_{nev} = \left(\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (T_{i,j} - T_{an}) \right) / (N_x N_y) \quad (7)$$

Где N_x – количество ячеек по оси Ox , N_y – количество ячеек по оси Oy , $T_{i,j}$ – значение температуры, полученное в ходе численного расчета, T_{an} – значение температуры, полученное аналитически.

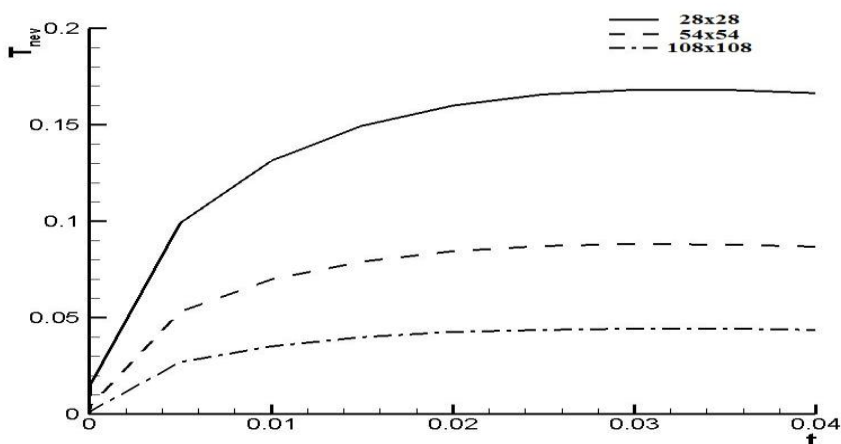


Рисунок 1. Относительная погрешность вычислений температуры от времени в зависимости от используемой сетки для граничных условий первого рода

Из рис.1 видно, что невязки со временем выходят на асимптотические значения, причем с увеличением числа узлов точность решения повышается.

2 серия тестовых расчетов:

Как и в предыдущей задаче, в этой имеется аналитическое решение –

$$T = 1 + 10 \cdot \exp(-\lambda t) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \quad (8)$$

однако в качестве граничных условий выступают граничные условия второго рода (справа и слева области)

$$\begin{cases} Q_{left} = Q_{right} = 0 \\ T_{up} = T_{down} = 1 \end{cases}$$

То есть на левой и правой границах заданы нулевые потоки тепла, а на верхней и нижней – начальные значения температуры.

На рис.2 представлена зависимость относительной погрешности от времени для различных сеток. При этом поведение зависимостей качественно аналогично первому случаю.

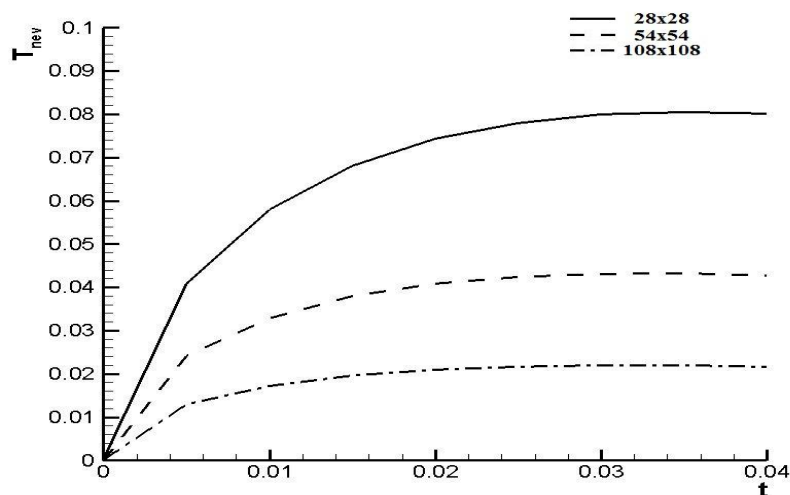


Рисунок 2. Относительная погрешность вычислений температуры от времени в зависимости от используемой сетки для граничных условий второго рода

3 серия тестовых расчетов:

В этой серии тестовых расчетов рассмотрена задача с ненулевыми значениями поля скоростей (то есть непосредственно задача конвекции-диффузии).

Пусть задана квадратная расчетная область со стороной длиной L. Решение будем искать в следующем виде:

$$T(x, y, t) = T_0 + T_m \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \cdot \exp(-\lambda \cdot t) \quad (9)$$

где $\lambda = 2 \cdot \chi \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$, где χ – безразмерный параметр.

Поле скоростей в области подобрано так, чтобы конвекция не оказывала влияния на диффузию:

$$\begin{aligned} u &= -u_0 \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right), \\ w &= u_0 \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

На рис.3 представлено поле абсолютных значений скорости в заданной области.

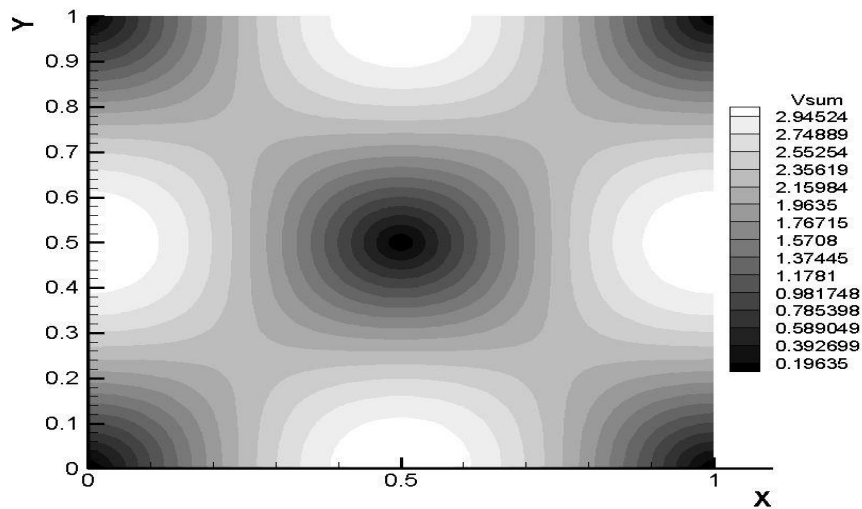


Рисунок 3. Поле скоростей в тестовой задаче №3

Варьируя параметром χ , можно переходить от режима с преобладанием диффузии к режиму с преобладанием конвекции. При отношении $\frac{\chi}{\nu} < 0.015$ схема становится неустойчивой.

Пусть $L=1$, $u_0=1$, $T_0=1$, $T_m=10$, а граничные условия задаются граничными условиями первого рода. На рисунке 4а представлена зависимость невязки от времени и от количества узлов в сетке при неизменном χ , а на рисунке 4б при неизменной сетке и различных χ (0.2, 1, 5). При этом поведение невязки как на рисунке 4б можно объяснить различной скоростью процесса. Так же из рисунка видно, что во всех трех случаях погрешность выходит на один и тот же уровень равный примерно 0.045.

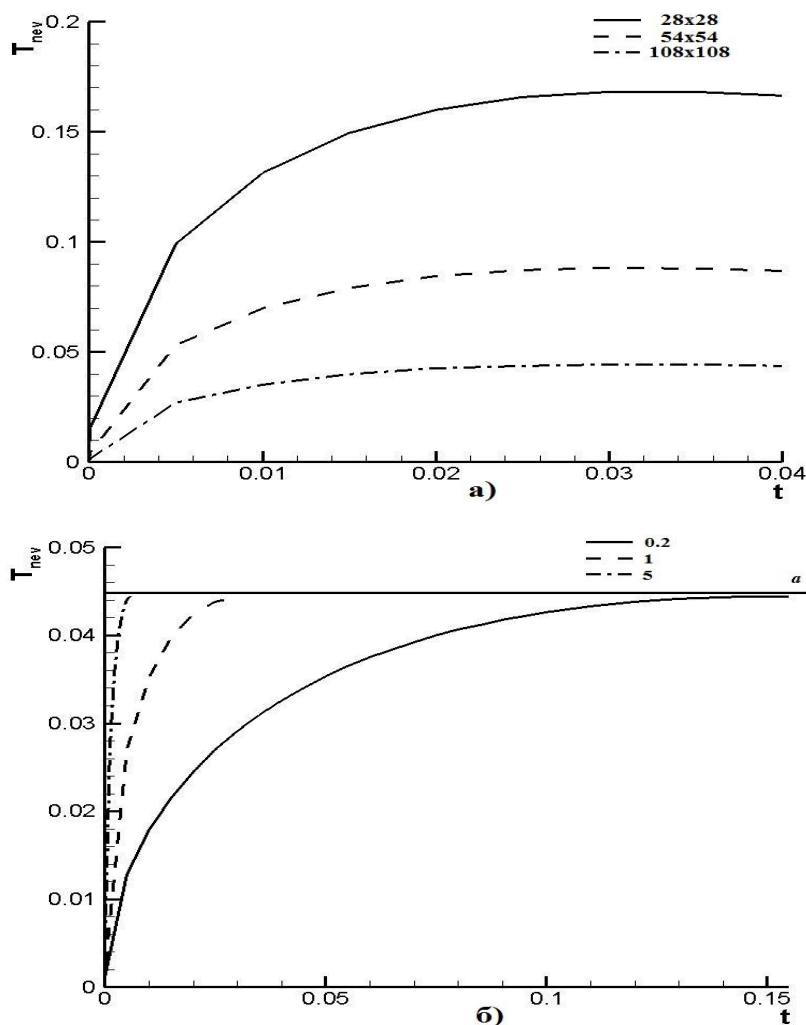


Рисунок 4. Относительная погрешность вычислений температуры от времени в зависимости от используемой сетки:

- а) при постоянном χ и различных сетках;
 б) при сетке 108x108 и различных χ (прямой а обозначена асимптота, на которую выходит относительная погрешность)

Как видно из рисунков 1,2 и 4 для тестов 1-3, при возрастании количества узлов в сетке уменьшается суммарная невязка, а, следовательно, повышается точность расчетов.

4 серия тестовых расчетов:

В качестве начальных условий бралось условие из предыдущей серии расчетов, однако в качестве граничных условий использовались граничные условия второго рода, при этом потоки на всех границах принимались равными нулю. Так как в этом случае не удастся подобрать аналитическое решение, то для проверки адекватности результатов изучался баланс энергии, который вычислялся по следующей формуле:

$$E_{nev} = (E_n - E_0 - Fp_{sum}) / (N_x N_y) \quad (11)$$

где E_0 – начальная энергия в системе, Fp_{sum} – энергия, поступившая в систему, E_n – энергия системы в текущий момент времени, N_x – количество ячеек по оси Ox , N_y – количество ячеек по оси Oy .

На рисунке 5 представлен график баланса энергии для различных значений χ . Видно, что с течением времени баланс выходит на один и тот же уровень $E_{nev}=7*10^{-6}$

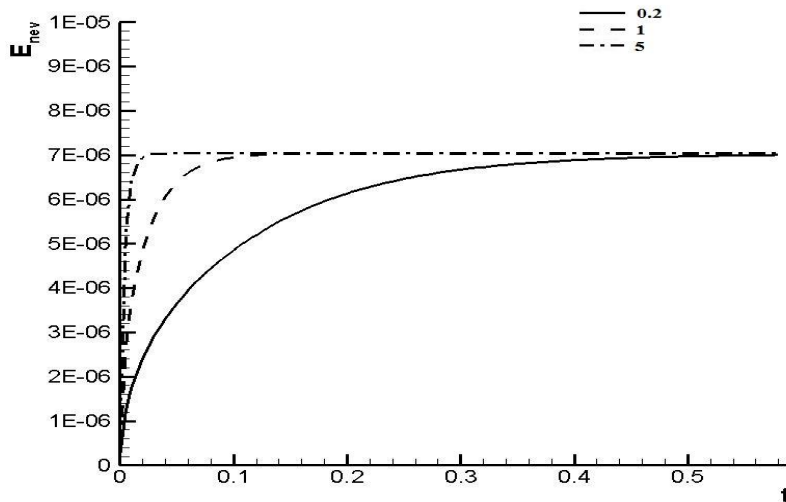


Рисунок 5. Баланс энергии для граничных условий второго рода (тестовая задача №4)

Задача «Вентилятор»

Была численно решена следующая задача: в центре области размером $L=1$ помещался «вентилятор», компоненты скорости которого вычислялись следующим образом:

$$\begin{cases}
 u = \begin{cases} 0, & \text{если } r = 0 \\ -\omega_0(y - y_c), & \text{если } 0 < r < r_0 \\ 0, & \text{если } r > r_0 \end{cases} \\
 w = \begin{cases} 0, & \text{если } r = 0 \\ \omega_0(x - x_c), & \text{если } 0 < r < r_0 \\ 0, & \text{если } r > r_0 \end{cases}
 \end{cases} \quad (12)$$

где $\omega_0 = 2\pi \cdot n$, $|r| = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}$, $r_0 = L/2.1$, n – число оборотов.

Вентилятор запускался не сразу, а через $t=0.3$.

Рассматривалось два случая:

- 1) С каждой стороны расчетной области задавались потоки, моделирующие тепловыделяющие элементы

$$\begin{cases} Q_{up}=Q_{down}=\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \text{ если } 0.3 < x < 0.7 \\ Q_{left}=Q_{right}=\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right), \text{ если } 0.3 < y < 0.7 \end{cases}$$

2) Начальная температура в области имела вид «купола», при этом потоки на границах области были равны нулю. Изучается влияние увеличения числа оборотов на конечное решение при неизменном параметре χ .

На рисунке 6а и 6б представлены поля температур для первого случая (сетка 108x108 ячеек), когда вентилятор включен ($n=5$) и выключен соответственно, при этом $\chi=1$, $t=0.4$.

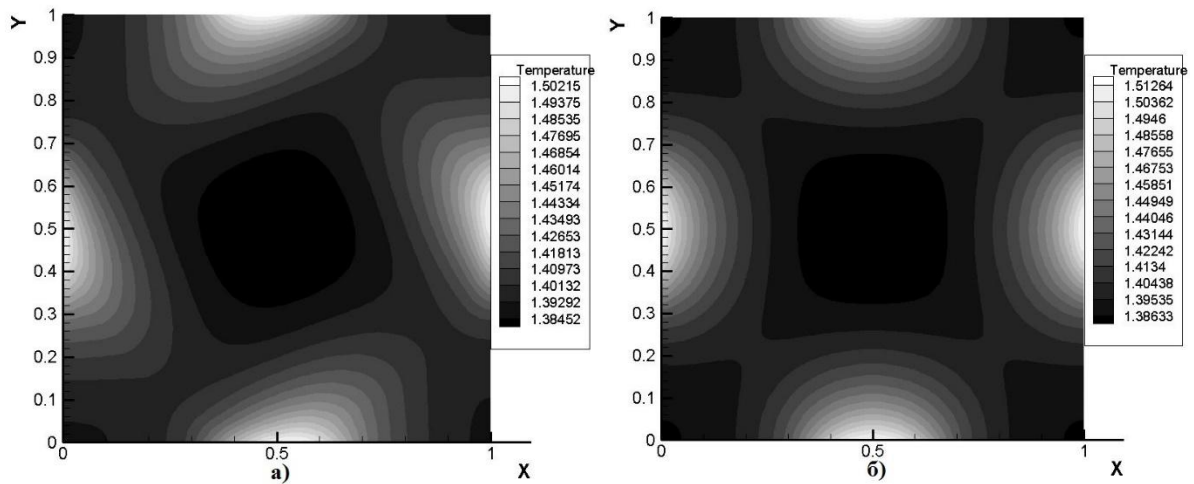


Рисунок 6. Поля температур на момент времени $t=0.4$ для случаев а) включенного вентилятора; б) выключенного вентилятора

На рисунке 7 приведен баланс энергии для второй задачи ($\chi=1$). При этом от количества оборотов (n выбиралось равным 1, 5 и 10) баланс энергии не зависит.

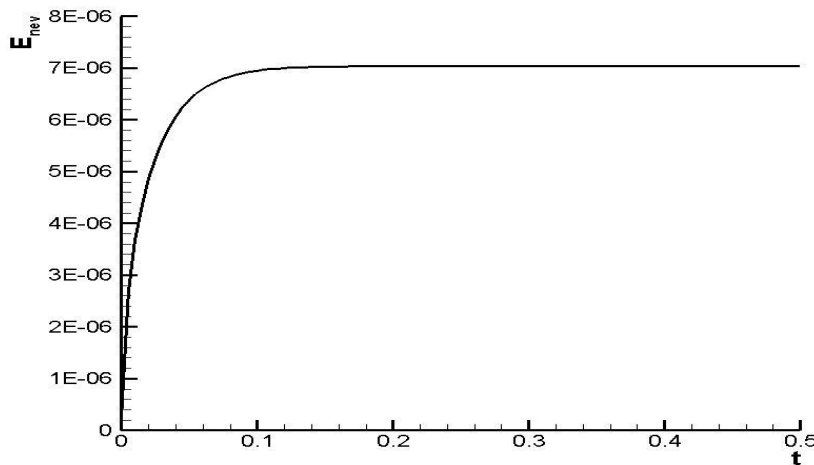


Рисунок 7. Баланс энергии для случая «купола» в центре области

Граничные условия третьего рода для задачи «Вентилятор».

Кроме того, были сделаны расчеты для граничных условий третьего рода, записанных в виде $\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha(T - T_0)$, где α – некий эмпирический коэффициент, определяющий скорость теплообмена. В первой серии проверялась правильность задания граничных условий третьего рода путем сравнения со случаем, когда сверху и снизу области задавались потоки, равные нулю (этот случай соответствует граничным условиям третьего рода, когда $\alpha=0$). Как видно из рисунков, получается полное соответствие решений, и, следовательно, граничные условия заданы верно. В этой задаче справа и слева задавались потоки, моделирующие нагревательные элементы (полностью аналогично первому случаю для задачи «Вентилятор»), а сверху и снизу – граничные условия третьего рода, причем $\alpha=1$ в первой серии расчетов, а во второй $\alpha=2$. Как можно видеть из рисунков, увеличение коэффициента α приводит к изменению распределения температуры в области, причем зависимость – нелинейная.

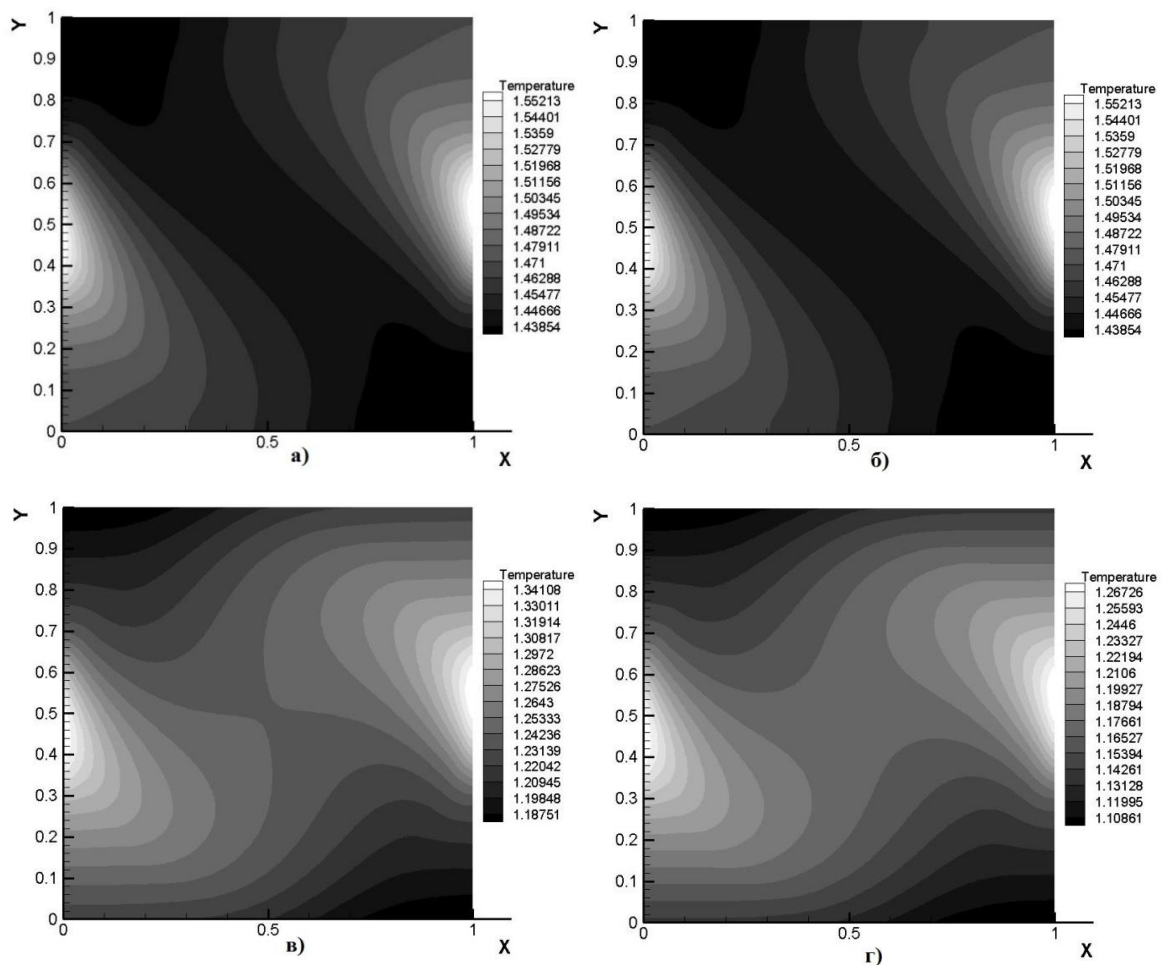


Рисунок 8. Поля температур для момента времени $t = 0.9$ при а) граничных условиях второго рода, б) граничных условиях третьего рода и $\alpha=0$, в) граничных условиях третьего рода и $\alpha=1$, г) граничных условиях третьего рода и $\alpha=2$

Кроме того, было замечено, что при α больших 5 в области создается достаточный отток тепла, чтобы нагрев области был минимальным.

3. Основные результаты и выводы.

1. Создана двумерная программа “Cooler” для численного решения задачи “конвекции-диффузии”.
2. Проведено тестирование программы и показана хорошая точность результатов расчетов.
3. Промоделированы задачи влияния вихревого течения газа на распределение поля температур в заданной области.

Список литературы:

1. Самарский А.А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. – М.: Едиториал УРСС, 2004. –248 с.
2. Симаков А.И., Лебо И.Г. Решение двумерного уравнения конвекции-диффузии применительно к задаче о теплообмене вблизи электронных устройств // Материалы Международной научно-технической конференции «INTERMATIC – 2013» – М.: Энергоатомиздат, 2013. – Ч. 1. – с. 40-43.
3. Самарский А.А., Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. –616 с.
4. Л. А. Крукиер, Г. В. Муратова, Т. Н. Субботина. Эффективные разностные схемы решения нестационарного уравнения конвекции-диффузии с преобладающей конвекцией. // Математическое моделирование том 17 № 12 2005. с. 80-86.
5. Л. А. Крукиер, Т. Н. Субботина. Об одном классе треугольных кососимметричных схем решения нестационарного уравнения конвекции-диффузии. // Известия высших учебных заведений. Математика № 5 (504) 2004. с. 41-46.