

УДК 541.64:539.3

**НОВЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ
ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
МАКСВЕЛЛА И КЕЛЬВИНА-ФОГТА**

В.Д. Карлов

Московский технологический университет (Институт тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова), Москва 119571, Россия

@Автор для переписки, e-mail: nyandude73@gmail.com

В статье предложены новые функциональные соотношения для деформаций и напряжений в рамках линейных реологических моделей Максвелла и Кельвина-Фогта. Полученные соотношения справедливы для всего интервала времени, что позволяет рассмотреть многочисленные частные случаи ползучести и релаксации напряжения, в частности, следующие практические режимы: постоянное напряжение, постоянная деформация, постоянная скорость деформации. Все расчёты основаны на использовании единичной функции Хэвисайда, дельта-функции Дирака и решении задачи Коши, выведенном профессором Э.М. Карташовым. Использование обобщённых функций позволяет рассмотреть и более сложные трёхэлементные модели, например, с двумя пружинами и одним демпфером и наоборот. Принципиальная сторона подхода при этом не меняется, математические выкладки практически не усложняются. Предложенные соотношения могут быть использованы в реологии как обобщающая форма записи, содержащая известные частные случаи. Настоящая работа представляет методический интерес для кафедр полимерного профиля.

Ключевые слова: релаксация, ползучесть, напряжение, деформация, полимеры, модель Максвелла, модель Кельвина-Фогта, задача Коши, упругость, вязкость, дифференциальные уравнения.

**NEW FUNCTIONAL RELATIONS FOR LINEAR RHEOLOGICAL
MODELS OF MAXWELL AND KELVIN-VOIGT**

V.D. Karlov

*Moscow Technological University (M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies),
Moscow 119571, Russia*

@Corresponding author e-mail: nyandude73@gmail.com

The article proposes new functional relationships for deformations and stresses within the framework of the linear rheological Maxwell and Kelvin-Voigt models. The relations obtained are valid for the entire time interval, which allows one to consider numerous special cases of creep and relaxation tension, in particular the following practical regimes: constant tension, constant deformation, constant strain rate. In calculations, the Heaviside step function, the Dirac delta function, and the solution of the Cauchy problem proposed by E.M. Kartashov were used. Using of generalized functions allows us to consider more complex three-element models, for example, with two springs and one damper and vice versa. At the same time, the principal aspect of the approach does not change, the mathematical calculations are practically not complicated. The proposed relations can be used in rheology as a generalizing form of the record containing known special cases. This work presents a methodological interest for the departments of polymeric profile.

Keywords: relaxation, creep, tension, deformation, polymers, Maxwell model, Kelvin-Voigt model, Cauchy problem, elasticity, viscosity, differential equations.

Введение

Необходимость в построении механических моделей полимерных тел возникла вследствие неприменимости обычных уравнений упругости и вязкости к полимерам. Полимеры в одних случаях ведут себя как упругие тела, а в других – как вязкие жидкости, поэтому их механическое поведение не подчиняется ни закону Гука

$$\sigma = E\varepsilon,$$

ни закону вязкого течения Ньютона

$$\sigma = \eta d\varepsilon/dt,$$

где σ – напряжение [Па];

ε – деформация (безразмерная величина);

E – модуль упругости [Па];

η – коэффициент вязкости [Па·с].

Для описания механического поведения полимерных тел были разработаны соответствующие модели, которые учитывают одновременно протекающие процессы упругого деформирования и вязкого течения [1–3]. При этом под механической моделью материала подразумевается не только набор пружин (упругость) и демпферов (вязкость), но и соответствующие моделям дифференциальные уравнения вида

$$\sum_{k=0}^m a_k \frac{d^k \sigma}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k \varepsilon}{dt^k}, \quad t > 0 \quad (1)$$

с заданными начальными условиями для напряжения $\sigma(t)$, либо для деформации $\varepsilon(t)$: здесь a_k, b_k ($k = \overline{1, m}$) – постоянные коэффициенты, которые определяют механические свойства изучаемого материала.

Модельные представления на основе уравнения (1) неизменно излагаются в литературе по механике и физике полимеров [1–4]. И как это ни странно, но в столь, казалось бы, завершенной области реологии еще остались «математические резервы» для переосмысления аналитических решений уравнения (1). Математической формой этих

решений относительно напряжения при заданной деформации или деформации при заданном напряжении традиционно является система кусочно-гладких функций, каждая из которых описывает процесс в своем интервале времени. Однако, по нашему мнению, можно иначе описать эти решения, используя единое функциональное соотношение для всех $t > 0$.

Используем для расчетов обобщенные функции [4]: единичную функцию Хэвисайда

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

и дельта-функцию Дирака

$$\delta(x) = H'(x).$$

При этом:

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = \begin{cases} f(x_0), & x_0 \in (a,b), \\ 0, & x_0 \notin (a,b). \end{cases} \quad (3)$$

Используем также предложенное автором [4] решение задачи Коши

$$\begin{cases} y'(t) + a^2 y(t) = \varphi(t), & t > 0 \\ y(t)|_{t=0} = y_0 \end{cases} \quad (4)$$

в виде компактного соотношения

$$y(t) = y_0 e^{-a^2 t} + \int_0^t \varphi(\tau) e^{-a^2(t-\tau)} d\tau. \quad (5)$$

Модель Максвелла является наиболее простой моделью, описывающей поведение вязкого тела, осложненного упругостью. В модели Максвелла упругие и вязкие элементы соединены последовательно, как это показано на рис. 1, напряжение $\sigma(t)$, приложенное к модели, вызывает деформацию в каждом элементе:

упругую деформацию пружины

$$\varepsilon_1(t) = \sigma(t)/E$$

и деформацию вязкого элемента

$$\varepsilon_2(t) = \left(\frac{1}{\eta}\right) \int_0^t \sigma(\tau) d\tau.$$

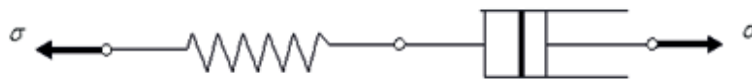


Рис. 1. Последовательное соединение демпфера и пружины.

Общая деформация складывается из деформации элементов $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, то есть

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)/E + \left(1/\eta\right) \int_0^t \sigma(\tau) d\tau,$$

откуда после дифференцирования приходим к уравнению вида (1) для модели Максвелла

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma, t > 0. \quad (6)$$

Рассмотрим частные случаи для уравнения (6).

Постоянное напряжение (модель Максвелла)

Пусть в начальный момент времени (при $t = 0$) приложено постоянное напряжение σ_0 , действующее до момента времени t_0 , после чего строятся графики зависимости напряжения и деформации от времени (рис. 2).

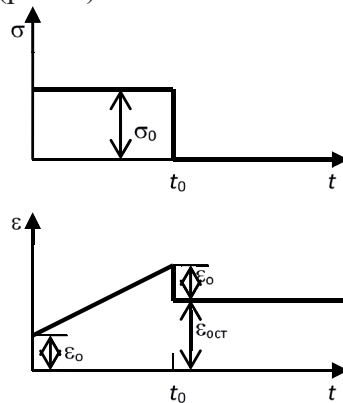


Рис. 2. Графики зависимости напряжения и деформации от времени в случае действия постоянного напряжения на модель Максвелла.

Имеем:

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t_0 - t), t > 0. \quad (7)$$

Так как $\frac{d\sigma}{dt} = -\sigma_0 \delta(t_0 - t),$

где $\sigma_0 = E\varepsilon_0,$

ε_0 – величина мгновенной деформации упругого элемента,
то (6) и (7) дают следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = -\varepsilon_0 \delta(t_0 - t) + \left(\frac{\sigma_0}{\eta}\right) H(t_0 - t), t > 0 \\ \varepsilon(t)|_{t=0} = \varepsilon_0 \end{cases} \quad (8)$$

решение которой, согласно (5), имеет вид:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 - \varepsilon_0 \int_0^t \delta(t_0 - \tau) d\tau + \left(\frac{\sigma_0}{\eta}\right) \int_0^t H(t_0 - \tau) d\tau. \quad (9)$$

При вычислении интегралов в (9) следует проявить особую внимательность: необходимо перевести t_0 в нижний или верхний пределы в зависимости от значений времени t относительно t_0 и далее воспользоваться соотношениями (2) и (3). Если ввести также время релаксации $\tau = \eta/E$ и учесть, что

$$\sigma_0/\eta = \left(\sigma_0/E\right) \cdot \left(E/\eta\right) = \varepsilon_0/\tau,$$

то из (9) окончательно находим:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left\{ H(t_0 - t) + \left(1/\tau\right) \left[t - (t - t_0) H(t - t_0) \right] \right\}, t > 0. \quad (10)$$

Это и есть общая формула, описывающая деформацию в модели Максвелла в полном интервале времени $t > 0$ (рис. 2).

Для интервала времени $0 \leq t < t_0$ имеем из (10):

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 (1 + t/\tau).$$

Остаточная деформация после снятия напряжения ($t > t_0$) есть:

$$\varepsilon_{\text{ост}} = \varepsilon_0 t_0 / \tau;$$

деформация в момент времени t_0 ($t \rightarrow t_0 - 0$, так что $H(t - t_0) \rightarrow 1$) равна

$$\varepsilon(t_0) = \varepsilon_0 (1 + t_0/\tau).$$

Постоянная деформация (модель Максвелла)

Пусть в начальный момент времени (при $t = 0$) модели дана мгновенная постоянная деформация ε_0 , действующая до момента времени t_0 , снимается график зависимости напряжения и деформации от времени (рис. 3).

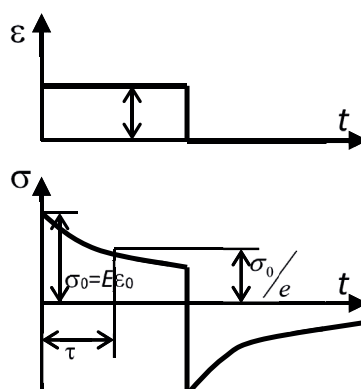


Рис. 3. Графики зависимости напряжения и деформации от времени в случае действия постоянной деформации на модель Максвелла.

Имеем:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t_0 - t), \quad t > 0. \quad (11)$$

Уравнение (6) относительно изменения напряжения $\sigma(t)$ дает следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\sigma}{dt} + \left(\frac{E}{\eta}\right)\sigma = -(E\varepsilon_0)\delta(t_0 - t), & t > 0 \\ \sigma(t)|_{t=0} = \sigma_0 \end{cases}, \quad (12)$$

решение которой, согласно (5), имеет вид:

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-(E/\eta)t} - \sigma_0 \int_0^t e^{-(E/\eta)(t-\tau)} \delta(\tau - t_0) d\tau. \quad (13)$$

После вычисления интеграла по схеме, изложенной выше, находим соотношение, содержащее полную информацию об изменении напряжения при всех $t > 0$:

$$\sigma(t) = \sigma_0 [1 - H(t - t_0) e^{t_0/\tau}] e^{-(t/\tau)}, \quad t > 0. \quad (14)$$

Для времени $t < t_0$ имеем из (14):

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-(t/\tau)},$$

при $t > t_0$ напряжение

$$\sigma(t) = \sigma_0 (1 - e^{t_0/\tau}) e^{-(t/\tau)},$$

в момент времени t_0 ($t \rightarrow t_0 + 0$) напряжение равно величине

$$\sigma(t_0) = -\sigma_0 (1 - e^{-t_0/\tau}).$$

Модель Кельвина-Фогта в отличие от модели Максвелла учитывает упругость, отличную от гуковской, которая возникает в полимерах за счет разворачивания макромолекул. В этой модели упругий и вязкий элементы соединены параллельно, как это показано на рис. 4. Деформация такой модели является общей для обоих элементов, а напряжение складывается из напряжений в каждом элементе:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Дифференциальное уравнение для этой модели имеет вид:

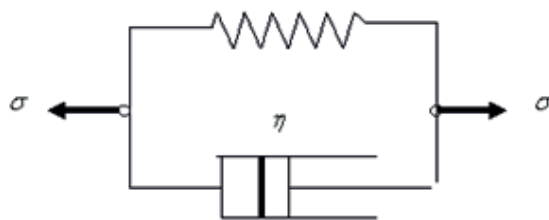


Рис. 4. Параллельное соединение демпфера и пружины.

$$\eta \frac{d\varepsilon}{dt} + E\varepsilon = \sigma, t > 0. \quad (15)$$

Здесь, как и выше, могут быть рассмотрены частные случаи напряжения.

Постоянное напряжение (модель Кельвина-Фогта)

Так как начальное напряжение σ_0 не может вызывать мгновенную деформацию (демпфер не дает пружине мгновенно деформироваться), то задача Коши для уравнения (15) имеет вид (рис. 5):

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} + (E/\eta)\varepsilon = (\sigma_0/\eta)H(t_0 - t), & t > 0 \\ \varepsilon(t)|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

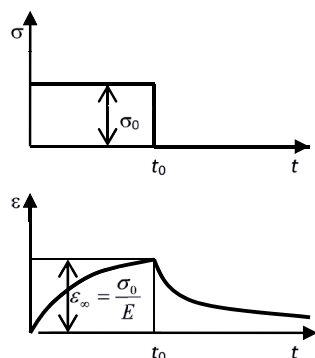


Рис. 5. Графики зависимости напряжения и деформации от времени в случае действия постоянного напряжения на модель Кельвина-Фогта.

Опуская выкладки, приведем конечный результат:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_\infty e^{-t/\tau} \left[\left(e^{t_0/\tau} - 1 \right) - H(t_0 - t) \left(e^{t_0/\tau} - e^{t/\tau} \right) \right], t > 0, \quad (17)$$

где $\varepsilon_\infty = \sigma_0/E$, если учесть, что деформация возрастает по времени, асимптотически стремясь к гуконской.

Рассмотрим интервалы времени $t < t_0$ и $t \geq t_0$. В первом из них $\varepsilon(t) = \varepsilon_\infty (1 - e^{-t/\tau})$, во втором – $\varepsilon(t) = \varepsilon_\infty (1 - e^{-t_0/\tau}) e^{-(t-t_0)/\tau}$.

Так как мгновенные возникновение и сокращение деформации отсутствуют, то при снятии напряжения в момент времени t_0 деформация должна быть непрерывной, что и подтверждают приведенные соотношения (рис. 5).

Постоянная скорость деформации (модель Кельвина-Фогта)

Модель Кельвина-Фогта не допускает мгновенной деформации, однако допускает деформацию с постоянной скоростью v_0 .

Рассмотрим следующий режим нагрузки (рис. 6):

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = v_0 H(t_0 - t), & t > 0 \\ \varepsilon(t)|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

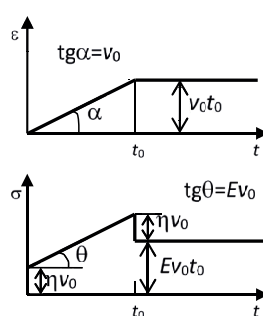


Рис. 6. Графики зависимости напряжения и деформации от времени в случае действия постоянной скорости деформации на модель Кельвина-Фогта.

Уравнения (15) и (18) приводят к соотношениям:

$$\varepsilon(t) = v_0 [t_0 - (t_0 - t)H(t_0 - t)], \quad t > 0, \quad (19)$$

$$\sigma(t) = \eta v_0 H(t_0 - t) + E v_0 [t_0 - (t_0 - t)H(t_0 - t)], \quad t > 0. \quad (20)$$

и в такой же форме позволяют описать напряжение для времени $t < t_0$:

$$\sigma(t) = \eta v_0 + E v_0 t$$

и для времени $t > t_0$:

$$\sigma = E v_0 t_0.$$

Использование обобщенных функций позволяет рассмотреть и более сложные трехэлементные модели, например, с двумя пружинами и одним демпфером и наоборот. Принципиальная сторона подхода при этом не меняется, математические выкладки практически не усложняются.

Предложенные соотношения могут быть использованы в реологии как обобщающая форма записи, содержащая известные частные случаи. Настоящая работа представляет также методический интерес, особенно для кафедр полимерного профиля.

Автор благодарит профессора Карташова Э.М. за предоставленную информацию.

Литература:

1. Гуль В.Е., Кулезнев В.Н. Структура и механические свойства полимеров полимеров. М.: Лабиринт, 1994. 366 с.
2. Аскадский А.А. Лекции по физикохимии полимеров. М.: Изд-во МГУ, 2001. 220 с.
3. Куличихин В.Г., Шрамм Г. Основы практической реологии и реометрии. М.: Колосс, 2003. 312 с.
4. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.

References:

1. Gul' V.E., Kuleznev V.N. The structure and mechanical properties of polymers. Moscow: Labirint Publ., 1994. 366 p. (in Russ.)
2. Askadskiy A.A. Lectures about physicochemistry of polymers. Moscow: MSU Publ., 2001. 220 p. (in Russ.)
3. Kulichihin V.G., Shramm G. Fundamental of practice rheology and rheometry. Moscow: Koloss Publ., 2003. 312 p. (in Russ.)
4. Kartashov E.M. Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 2001. 550 p. (in Russ.)

Об авторе:

Карлов Вячеслав Дмитриевич, студент кафедры биотехнологии и промышленной фармации Института тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова ФГБОУ ВО «Московский технологический университет» (86, пр-т Вернадского, Москва, 119571, Россия).

About author:

Vyacheslav D. Karlov, student, Chair of Biotechnology and Industrial Pharmacy, M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies, Moscow Technological University (86, Vernadskogo Pr., Moscow 119571, Russia)