

УДК 621.372.8

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СВЯЗАННЫХ ПОЛОСКОВЫХ ЛИНИЙ В МНОГОСЛОЙНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Коваленко А.Н., д.т.н., профессор, МГТУ МИРЭА, Email: aleks-kovalenko@mail.ru
Москва, Россия

Аннотация. На основе ранее предложенного автором численно-аналитического метода расчета собственных волн микрополосковой линии построена алгебраическая модель, позволяющая быстро и с высокой точностью решать задачи анализа и синтеза полосковых линий в многослойной диэлектрической среде. Исследованы свойства бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, к решению которой сведена электродинамическая задача. Матричные коэффициенты, для которых получены простые асимптотические выражения, преобразованы в быстро сходящиеся ряды.

Ключевые слова: Собственные волны; алгебраическая модель; анализ; синтез; быстро; высокая точность.

A MATHEMATICAL MODEL OF COUPLED STRIP LINES IN A MULTILAYER DIELECTRIC MEDIUM

Kovalenko A.N., D.ofSci(Tech), prof., MSTU MIREA, Email: aleks-kovalenko@mail.ru
Moscow, Russia

Abstract. On the basis of the previously proposed by the author numerical method for calculating the eigenwaves of the microstrip line algebraic model for quickly and accurately solve the problems of analysis and synthesis coupled strip lines in a multilayer dielectric medium. The properties of an infinite system of linear algebraic equations, the solution of with is reduced the electrodynamics problem. Matrix coefficients, which are obtained asymptotically simple formulas, converted to rapidly convergent series.

Keywords: eigenwaves; algebraic model; analysis; synthesis; high precision; quickly.

Введение

Полосковые линии различного типа широко используются в качестве элементов интегральных схем (ИС) СВЧ. Тесное расположение отдельных элементов ведёт к тому, что межэлементная электромагнитная связь начинает играть важную роль в функционировании схемы. Помимо проблемы связи, современная технология монолитных ИС СВЧ включает изготовление многоуровневых планарных структур. Использование покрывающих и подстилающих слоёв и слоёв диэлектрика между металлическими элементами приводит к необходимости анализа элементов с учётом многослойности диэлектрической среды. Из выше сказанного следует актуальность разработки эффективных методов анализа многослойных планарных структур. Решение этой задачи позволяет также построить математические модели различных полосковых линий (мик-

рополосковых, щелевых, высокодобротных и др.) и СВЧ элементов на их основе. В [1] предложен эффективный численно-аналитический метод расчета собственных волн экранированной микрополосковой линии. В основу метода положен проекционный метод решения интегральных уравнений специального вида с использованием «чебышевского» базиса, учитывающего в явном виде особенности решения. Метод позволяет получить численные результаты с высокой точностью при небольшом числе базисных функций [2]. В [3] этот метод обобщён на многослойные полосковые направляющие структуры. В данной работе на основе этого метода разработана алгебраическая модель, позволяющая эффективно решать не только задачи анализа, но и задачи синтеза связанных полосковых линий в многослойной диэлектрической среде

1. Основные расчетные соотношения

Рассматривается многослойная направляющая структура в прямоугольном экране с размерами $2a, b$. Поперечное сечение структуры показано на рис. 1. Область ниже полосковых проводников ($y < c$) обозначена как 1, область выше полосковых проводников — 2. В области 1-K слоев, в области 2-N слоев, $\epsilon_{j1,2}$ - относительная диэлектрическая проницаемость среды в j-том слое областей 1, 2.

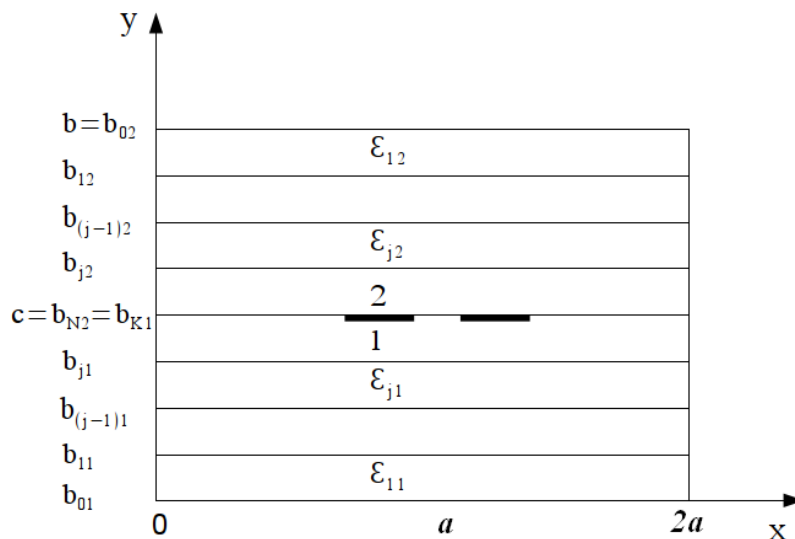


Рис.1. Поперечное сечение многослойной направляющей структуры

При одинаковой ширине полосковых проводников, расположенных на одинаковых расстояниях от боковых стенок экрана, задача о собственных волнах связанных линий сводится к двум задачам о собственных волнах одиночной линии: 1) с магнит-

ной стенкой в плоскости симметрии $x = a$; 2) с электрической стенкой в этой плоскости. Из первой задачи определяются собственные волны чётного типа (синфазные волны), из второй – нечётного типа (противофазные волны). Для волн чётного типа в плоскости симметрии равна нулю тангенциальная составляющая напряжённости магнитного поля. Для волн нечётного типа в этой плоскости равна нулю тангенциальная составляющая напряжённости электрического поля.

Собственные волны представляются в виде рядов Фурье, коэффициенты разложения которых выражаются через интегралы от плотности тока на полосковом проводнике. Граничное условие на его поверхности приводит к системе интегральных уравнений относительно продольной η_z и поперечной η_x составляющих плотности тока

Для собственных волн нечётного типа эта система представляется в виде [3]:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\chi_m^2} [(\Gamma^2 G_m^{\ominus} + \alpha_m^2 G_m^M) I_{zm} + \alpha_m (G_m^M - G_m^{\ominus}) I_{xm}] \sin \alpha_m x = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{\chi_m^2} [\alpha_m (G_m^M - G_m^{\ominus}) I_{zm} + (\frac{\alpha_m^2}{\Gamma^2} G_m^{\ominus} + G_m^M) I_{xm}] \cos \alpha_m x = 0,$$

$$I_{zm} = \int_{x_0-W/2}^{x_0+W/2} \eta_z(x') \sin \alpha_m x' dx', \quad I_{xm} = \int_{x_0-W/2}^{x_0+W/2} i \eta_x(x') \cos \alpha_m x' dx',$$

$$G_m^{\ominus, M} = (1/Z_{mK1}^{\ominus, M} + 1/Z_{mN1}^{\ominus, M})^{-1},$$

$$Z_{mj1,2}^{\ominus, M} = \frac{Z_{m(j-1),2}^{\ominus, M} + W_{mj1,2}^{\ominus, M} \operatorname{tg} \beta_{mj1,2} |b_{j1,2} - b_{(j-1),1,2}|}{1 - (Z_{m(j-1),2}^{\ominus, M} / W_{mj1,2}^{\ominus, M}) \operatorname{tg} \beta_{mj1,2} |b_{j1,2} - b_{(j-1),1,2}|},$$

$$W_{mj1,2}^{\ominus} = \beta_{mj1,2} / \varepsilon_{j12}, \quad W_{mj1,2}^M = 1 / \beta_{mj1,2}, \quad Z_{m01,2}^{\ominus, M} = 0,$$

$$\beta_{mj1,2} = \sqrt{\varepsilon_{j1,2} - \alpha_m^2}, \quad \alpha_m^2 = \alpha_m^2 + \Gamma^2, \quad \alpha_m = \frac{\pi}{a} m.$$

$\varepsilon_m = 1$, если $m = 0$ и $\varepsilon_m = 2$, если $m \neq 0$, $|x - x_0| \leq W/2$, W - ширина полоскового проводника, x_0 - расстояние до центра проводника, Γ - нормированная (к волновому числу $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$) постоянная распространения.

В приведенных и последующих выражениях используются безразмерные координаты и элементы длины, переход к которым осуществляется путем их умножения на волновое число свободного пространства k_0 .

Представим искомые функции $\eta_z(x)$ и $\eta_x(x)$ в виде разложений по взвешенным полиномам Чебышева $t_l(\tilde{x}) = \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{x}^2}} T_l(\tilde{x}), u_l(\tilde{x}) = \sqrt{1-\tilde{x}^2} U_l(\tilde{x})$, учитывающих в явном виде краевые особенности решения:

$$\eta_z(\tilde{x}) = \sum_{l=0}^L a_{2l} t_{2l}(\tilde{x}) + \sum_{l=1}^L a_{2l-1} t_{2l-1}(\tilde{x}),$$

$$i\Gamma \eta_x(\tilde{x}) = \frac{W}{2} \left[\sum_{l=1}^L b_{2l-1} u_{2l-1}(\tilde{x}) + \sum_{l=0}^{L-1} b_{2l} u_{2l}(\tilde{x}) \right],$$

$$\tilde{x} = (x - x_0) / (W/2), |\tilde{x}| \leq 1$$

Решая систему интегральных уравнений (1) проекционным методом, получим следующую бесконечную ($L \rightarrow \infty$) систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с симметричной матрицей коэффициентов:

$$A_{q0}^q a_0 + \sum_{l=1}^L \left(A_{ql}^q a_{2l} + B_{ql}^{Hq} b_{2l-1} + \tilde{A}_{ql}^{Hq} a_{2l-1} + \tilde{B}_{ql}^q b_{2(l-1)} \right) = 0, q = 0, 1, \dots, L,$$

$$C_{q0}^q a_0 + \sum_{l=1}^L \left(C_{ql}^q a_{2l} + D_{ql}^{Hq} b_{2l-1} + \tilde{C}_{ql}^{Hq} a_{2l-1} + \tilde{D}_{ql}^q b_{2(l-1)} \right) = 0, q = 1, 2, \dots, L, \quad (2)$$

$$\tilde{A}_{q0}^q a_0 + \sum_{l=1}^L \left(\tilde{A}_{ql}^q a_{2l} + \tilde{B}_{ql}^{Hq} b_{2l-1} + A_{ql}^{Hq} a_{2l-1} + B_{ql}^q b_{2(l-1)} \right) = 0, q = 1, 2, \dots, L,$$

$$\tilde{C}_{q0}^q a_0 + \sum_{l=1}^L \left(\tilde{C}_{ql}^q a_{2l} + \tilde{D}_{ql}^{Hq} b_{2l-1} + C_{ql}^{Hq} a_{2l-1} + D_{ql}^q b_{2(l-1)} \right) = 0, q = 1, 2, \dots, L,$$

$$A_{ql}^q = (-1)^{q+l} \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_{(2q)(2l)}(m\alpha) \sin^2 m\beta,$$

$$B_{ql}^{Hq} = (-1)^{q+l} 2l \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_{(2q)(2l)}(m\alpha) \sin^2 m\beta,$$

$$D_{ql}^{Hq} = (-1)^{q+l} 4ql \sum_{m=1}^{\infty} D_m J_{(2q)(2l)}(m\alpha) \sin^2 m\beta,$$

$$A_{ql}^{Hq} = (-1)^{q+l} \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_{(2q-1)(2l-1)}(m\alpha) \cos^2 m\beta,$$

$$D_{ql}^q = (-1)^{q+l} (2q-1)(2l-1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathcal{E}_m}{2} D_m J_{(2q-1)(2l-1)}(m\alpha) \cos^2 m\beta,$$

$$\tilde{A}_{ql}^{Hq} = -(-1)^{q+l} \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin m\beta \cos m\beta,$$

$$\tilde{B}_{ql}^q = -(-1)^{q+l} (2l-1) \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin m\beta \cos m\beta,$$

$$\tilde{C}_{ql}^{Hq} = -(-1)^{q+l} 2q \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin m\beta \cos m\beta,$$

$$\tilde{D}_{ql}^q = -(-1)^{q+l} 2q(2l-1) \sum_{m=1}^{\infty} D_m J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin m\beta \cos m\beta, \quad (3)$$

$$A_m = \frac{1}{\chi_m^2} (\Gamma^2 G_m^\ominus + \alpha_m^2 G_m^M), \quad B_m = \frac{1}{\chi_m^2} (G_m^M - G_m^\ominus), \quad D_m = \frac{1}{\chi_m^2} \left(\frac{G_m^\ominus}{\Gamma^2} + \frac{G_m^M}{\alpha_m^2} \right),$$

$$J_{ql}(x) = J_q(x)J_l(x), \quad J_\nu(x) - \text{функция Бесселя}, \quad \alpha = \frac{\pi W}{2a}, \quad \beta = \alpha \left(1 + \frac{S}{W}\right), \quad W - \text{ши-}$$

рина полосковых проводников, S - расстояние между проводниками.

Выражения для матричных коэффициентов системы (2) имеют такой же вид, как и для микрополосковой линии на однослойной подложке, приведённые в [1]. Поэтому алгоритмы расчета характеристик многослойных полосковых структур такие же, как и соответствующие алгоритмы для микрополосковых линий на однослойной подложке.

Собственные волны чётного типа определяются такими же выражениями, как и для собственных волн нечётного типа, в которых нужно заменить m на $m-1/2$, $\sin m\beta$ на $\cos(m-1/2)\beta$, $\cos m\beta$ на $\sin(m-1/2)\beta$ и при вычислении коэффициентов D_{ql}^c суммирование производится со значения $m=1$.

Из условия равенства нулю определителя D системы (2.), получим дисперсионное уравнение:

$$D(\Gamma^2) = 0, \quad (4)$$

из которого численными методами определяются постоянные распространения Γ собственных волн связанных линий.

Важными электродинамическими параметрами собственных волн являются коэффициенты замедления и волновые сопротивления. Через них определяются элементы матрицы рассеяния и рабочие характеристики восьмиполосника в виде отрезка связанных линий конечной длины при заданных значениях волнового сопротивления подводящих линий. Коэффициенты замедления, равные нормированным постоянным распространения Γ (для распространяющихся типов волн) определяются из дисперсионного уравнения (4). Волновые сопротивления определяются через мощность и ток и представляются в виде бесконечных рядов, аналогичных рядам для матричных коэффициентов системы (2).

2. Улучшение сходимости рядов для матричных коэффициентов

Бесконечные ряды для матричных коэффициентов, определяемых выражениями (3), сходятся медленно, и непосредственное их вычисление требует большого времени счёта и может приводить к неустойчивым результатам даже при учёте весьма большого числа членов в этих рядах. Поэтому при численном решении дисперсионного уравнения (4) и СЛАУ (2) необходимо выполнить процедуру улучшения сходимости рядов по разработанной в [1] методике. Следуя этой методике, к коэффициентам A_m, B_m и D_m нужно прибавить и вычесть их асимптотические выражения $A_m^\infty, B_m^\infty, D_m^\infty$, учитывая, что асимптотика функций $G_m^{\vartheta, M}$ при $m \rightarrow \infty$ не зависит от числа диэлектрических слоев ($G_m^\vartheta \sim m, G_m^M \sim 1/m$). $A_m^\infty = A/m, B_m^\infty = B/m, D_m^\infty = D/m$ (A, B, C – постоянные).

Для собственных волн нечётного типа выражения для коэффициентов A_{ql}^c , A_{ql}^{nc} , \tilde{A}_{ql}^{nc} представляются в виде :

$$A_{ql}^c = (-1)^{q+l} \left\{ A \cdot S_{ql}^{\mathcal{E}}(\alpha, \beta) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m - A_m^{\infty} \right) \cdot J_{(2q)(2l)}(m\alpha) \sin^2 m\beta \right\},$$

$$A_{ql}^{nc} = (-1)^{q+l} \left\{ A \cdot P_{ql}^{\mathcal{E}}(\alpha, \beta) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m - A_m^{\infty} \right) \cdot J_{(2q-1)(2l-1)}(m\alpha) \cos^2 m\beta \right\},$$

$$\tilde{A}_{ql}^{nc} = (-1)^{q+l} \left\{ A \cdot Q_{ql}^{\mathcal{E}}(\alpha, \beta) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m - A_m^{\infty} \right) \cdot J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin m\beta \cos m\beta \right\},$$

где
$$S_{ql}^{\mathcal{E}}(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_{(2q)(2l)}(m\alpha) \sin^2 m\beta, \quad (5)$$

$$P_{ql}^{\mathcal{E}}(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_{(2q-1)(2l-1)}(m\alpha) \cos^2 m\beta, \quad (6)$$

$$Q_{ql}^{\mathcal{E}}(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin m\beta \cos m\beta. \quad (7)$$

Аналогичные выражения можно получить и для других матричных коэффициентов. Для собственных волн чётного типа выражения для матричных коэффициентов представляются в аналогичном виде и определяются через функции $S_{ql}^M(\alpha, \beta)$, $P_{ql}^M(\alpha, \beta)$, $Q_{ql}^M(\alpha, \beta)$ по следующим формулам:

$$S_{ql}^M(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m - \frac{1}{2}} J_{(2q)(2l)} \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \alpha \right] \cos^2 \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \beta \right], \quad (8)$$

$$P_{ql}^M(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m - \frac{1}{2}} J_{(2q-1)(2l-1)} \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \alpha \right] \sin^2 \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \beta \right], \quad (9)$$

$$Q_{ql}^M(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m - \frac{1}{2}} J_{(2q)(2l-1)} \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \alpha \right] \sin \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \beta \right] \cos \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \beta \right]. \quad (10)$$

При численном решении дисперсионного уравнения (4) и однородной СЛАУ (2), а также при расчёте волновых сопротивлений возникает проблема вычисления функций $S_{ql}^{\vartheta,M}(\alpha, \beta)$, $P_{ql}^{\vartheta,M}(\alpha, \beta)$, $Q_{ql}^{\vartheta,M}(\alpha, \beta)$, определяемых медленно сходящимися рядами (5)-(10). Для достижения высокой точности (до четырёх значащих цифр) расчёта коэффициентов замедления и волновых сопротивлений необходимо учитывать в них до десяти тысяч членов, что связано с большими вычислительными затратами. Но даже при учёте весьма большого числа членов в этих рядах точность вычисления может оказаться недостаточной для получения устойчивых результатов. Эта проблема решена путём математических преобразований выражений (5-10), близких к использованным в [1]. Используя интегральные представления для функций Бесселя и их производных можно получить следующие представления для функций, определяемых рядами (5)-(10):

$$S_{ql}^{\vartheta}(\alpha, \beta) = R_{(2q)(2l)}(\alpha) - \frac{1}{2} R_{(2q)(2l)}(2\alpha) + F_{(2q)(2l)}(\alpha, \beta),$$

$$P_{ql}^{\vartheta}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} R_{(2q-1)(2l-1)}(2\alpha) - F_{(2q-1)(2l-1)}(\alpha, \beta),$$

$$Q_{ql}^{\vartheta}(\alpha, \beta) = E_{2q(2l-1)}(\alpha, \beta),$$

$$S_{ql}^M(\alpha, \beta) = R_{(2q)(2l)}(\alpha) - 2F_{(2q)(2l)}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) - \left[\frac{1}{2} R_{(2q)(2l)}(2\alpha) - F_{(2q)(2l)}(\alpha, \beta) \right],$$

$$P_{ql}^M(\alpha, \beta) = 2R_{(2q-1)(2l-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - R_{(2q-1)(2l-1)}(\alpha) + 2F_{(2q-1)(2l-1)}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) - \\ - R_{(2q-1)(2l-1)}(\alpha) + \frac{1}{2} R_{(2q-1)(2l-1)}(2\alpha) - F_{(2q-1)(2l-1)}(\alpha, \beta),$$

$$Q_{ql}^M(\alpha, \beta) = 2E_{2q(2l-1)}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) - E_{2q(2l-1)}(\alpha, \beta).$$

где

$$R_{kn}(\alpha) = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos[(k-n)\theta] \cos[(k+n)\phi] \cdot \ln\left(2 \sin \frac{u}{2}\right) d\theta d\phi, \quad (11)$$

$k+n$ - чётное число;

$$F_{kn}(\alpha) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos[(k-n)\theta] \cdot \cos[(k+n)\phi] \cdot \left[\frac{1}{2} \ln(\sin \beta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \ln\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2} / \operatorname{tg}^2 \beta\right) \right] d\theta d\phi, \quad (12)$$

$k+n$ - чётное число;

$$E_{kn}(\alpha, \beta) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos[(k-n)\theta] \sin[(k+n)\varphi] \times \\ \times \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{u}{2} / \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \frac{u}{2} / \operatorname{tg} \beta} d\theta d\varphi, \quad (13)$$

$k+n$ - нечётное число, $u = 2\alpha \cos \theta \cdot \sin \varphi$.

Разлагая логарифмическую функцию в степенной ряд и интегрируя почленно, приведём выражения для функций $R_{kn}(\alpha)$ к виду:

$$R_{kn}(\alpha)|_{k \neq n} = (-1)^{\frac{k+n}{2}} \sum_{\nu=\frac{k+n}{2}}^{\infty} S_{2\nu} \frac{1}{\nu} \left[\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} \right]^2 \times \\ \times \frac{\nu(\nu-1) \dots \left(\nu+1 - \frac{k+n}{2} \right)}{(\nu+1)(\nu+2) \dots \left(\nu + \frac{k+n}{2} \right)} \times \frac{\nu(\nu-1) \dots \left(\nu+1 - \left| \frac{k-n}{2} \right| \right)}{(\nu+1)(\nu+2) \dots \left(\nu + \left| \frac{k-n}{2} \right| \right)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{2\nu}, \\ R_{kk}(\alpha)|_{k \neq 0} = \frac{1}{2k} + (-1)^k \sum_{\nu=k}^{\infty} S_{2\nu} \frac{1}{\nu} \left[\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} \right]^2 \times \frac{\nu(\nu-1) \dots (\nu+1-k)}{(\nu+1)(\nu+2) \dots (\nu+k)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{2\nu}, \\ R_{00}(\alpha) = \ln \frac{2}{\alpha} + \sum_{\nu=1}^{\infty} S_{2\nu} \frac{1}{\nu} \left[\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} \right]^2 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{2\nu}, \quad S_{2\nu} \approx \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2\nu}}.$$

Из полученных выражений видно, что ряд быстро сходится, и при расчете функции $R_{kn}(\alpha)$ в нём достаточно учесть несколько первых членов, а при больших значениях q и l этот ряд близок к нулю, и в этом случае для функции $R_{kn}(\alpha)$ получим следующее асимптотическое выражение:

$$R_{kn} \cong \frac{\delta_{kn}}{2k}, \quad \text{где } \delta_{kn} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = n \\ 0 & \text{при } k \neq n \end{cases}.$$

Аналогичные представления можно получить также для функций $F_{kn}(\alpha, \beta)$ и $E_{kn}(\alpha, \beta)$, разлагая в выражениях (12), (13) тангенс и логарифм в степенные ряды и интегрируя почленно.

Таким образом, используя интегральные представления (11)-(13), можно получить выражения для функций $S_{ql}^{\mathcal{E},M}(\alpha, \beta)$, $P_{ql}^{\mathcal{E},M}(\alpha, \beta)$, $Q_{ql}^{\mathcal{E},M}(\alpha, \beta)$ в виде быстросходящихся рядов. При больших значениях q и l эти функции представляются в виде:

$$S_{ql}^{\mathcal{E},M} \cong \frac{1}{8q} \delta_{ql}, \quad P_{ql}^{\mathcal{E},M} \cong \frac{1}{4(2q-1)} \delta_{ql}, \quad Q_{ql}^{\mathcal{E},M} \cong 0 \quad (14)$$

Используя (14), можно получить асимптотические выражения для матричных коэффициентов системы (2), учитывая, что при больших значениях q и l ($q \neq l$) бесконечные ряды для матричных коэффициентов близки к нулю. При этом асимптотические выражения для коэффициентов $A_{ql}^{\mathcal{H}}, B_{ql}^{\mathcal{H}}, D_{ql}^{\mathcal{H}}$ пропорциональны функции $S_{ql}^{\mathcal{E},M}$; асимптотические выражения для коэффициентов $A_{ql}^{\mathcal{H}}, B_{ql}^{\mathcal{H}}, D_{ql}^{\mathcal{H}}$ пропорциональны функции $P_{ql}^{\mathcal{E},M}$; асимптотические выражения для коэффициентов $\tilde{A}_{ql}^{\mathcal{H}}, \tilde{B}_{ql}^{\mathcal{H}}, \tilde{C}_{ql}^{\mathcal{H}}, \tilde{D}_{ql}^{\mathcal{H}}$ пропорциональны функции $Q_{ql}^{\mathcal{E},M}$. Из этих выражений следует вывод о диагональном характере матрицы коэффициентов СЛАУ (2) и быстрой сходимости разложений для плотности тока по «чебышевскому» базису, что позволяет получить решение методом редукции при небольшом порядке редуцированной СЛАУ. Результаты численного исследования сходимости практически не зависят от числа диэлектрических слоёв и не отличаются от результатов для связанных линий на обычной подложке, представленных в [4]. В результате расчетов, выполненных на персональном компьютере (ПК), исследована сходимость разложений для плотности тока на полосковых проводниках по взвешенным полиномам Чебышева и решен вопрос о выборе числа L , определяющего порядок $K = 4L + 1$ СЛАУ и числа M_y , которое нужно учитывать в рядах для матричных коэффициентов после улучшения сходимости этих рядов. Для основной волны и высших волн, число которых N не превышает 10, число $L \leq 2$ в широком диапазоне изменения параметров. Число M_y выбирается как максимальное из чисел: 20, $E(a/c)$, $E(\xi a/c)$, где $E(x)$ – целая часть числа x ; $\xi = \sqrt{\varepsilon} f[\Gamma\Gamma\eta]c[\text{мм}]/50$ (ε – диэлектрическая проницаемость подложки). При таком выборе чисел L и M_y погрешность расчета коэффициентов замедления и волновых сопротивлений не превышает 0.1%. При этом улучшение сходимости рядов позволяет существенно (в несколько десятков раз) сократить время счёта на ПК.

Заключение

Разработанная математическая модель многослойной полосковой структуры основана на строгом решении граничной задачи электродинамики. Она позволяет путём компьютерного моделирования получить численные результаты с высокой точностью и с малыми вычислительными затратами независимо от числа диэлектрических слоёв.

При этом алгоритмы расчета характеристик многослойных полосковых структур такие же, как и соответствующие алгоритмы для микрополосковых линий на однослойной подложке. Поэтому разработанные алгоритмы и реализующие их компьютерные программы для микрополосковых линий могут быть использованы, при небольшой доработке, для расчёта многослойных полосковых структур. Высокие точность и скорость расчётов разработанной математической модели позволяют её эффективно использовать в системах анализа и оптимизации микрополосковых устройств с учётом технологических особенностей изготовления ИС СВЧ.

Список литературы

1. Коваленко А.Н. Собственные волны микрополосковой линии // Изв. вузов. Радиофизика. – 1978. – Т. 21, № 2. – С.188-194.
2. Коваленко А.Н. Анализ спектра экранированной полосковой линии // Изв. Вузов. Радиофизика. – 1980. – Т. 23, №11. – С. 1388-1390.
3. Коваленко А.Н. Собственные волны многослойных полосковых структур. // Изв. вузов. Радиофизика. – 2012. – Т. 55, №12. – С.759-766.
4. Коваленко А.Н. Математическое моделирование полосковых линий проекционным методом // Научный вестник МИРЭА. – 2010. – №2(9). – С.8-16.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1010 с.