УДК 517.9

ОБЩЕАСТИГМАТИЧЕСКИЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ФОКА-ГОРДОНА

Плаченов А.Б., к.ф.-м.н., доцент, МГТУ МИРЭА, Москва, Россия
E-mail: a_plachenov@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются общеастигматические обобщения известных локализованных решений уравнения Клейна-Фока-Гордона. Полученные решения имеют вид негармонических по времени экспоненциально локализованных волновых пучков и пакетов.
Ключевые слова: уравнение Клейна-Фока-Гордона, локализованные решения, общий астигматизм

GENERAL ASTIGMATIC LOCALIZED SOLUTIONS OF THE KLEIN-FOCK-GORDON EQUATION

Plachenov A.B., PhD., assist proff., MSTU MIREA, Moscow, Russia
E-mail: a_plachenov@mail.ru

Abstract. General astigmatic generalizations of known localized solutions of the Klein-Fock-Gordon equation are considered. Solutions obtained have a form of non-harmonic in time exponentially localized wave beams and packets.
Keywords: Klein-Fock-Gordon equation, localized solutions, general astigmatism

Введение

Цель настоящей заметки – получение точных негармонических по времени решений уравнения Клейна-Фока-Гордона (КФГ)

$$h^2(u_{tt}-\Delta u)+u=0 \tag{1}$$

(h – вещественный параметр, Δ - m-мерный оператор Лапласа), имеющих вид *гауссовых пучков* или *пакетов*, локализованных в окрестности m-ой (*продольной*) координатной оси ($x_m =: z$) и представляющих собой неосесимметричное многомерное обобщение известных [1-3] пучкообразных и пакетоподобных решений. Зависимость искомых функций от *поперечных координат* $x_{1,\dots,m-1}$ будет аналогична той, которая имеет место в оптических гауссовых пучках с *общим (сложным) астигматизмом* [4]. Предложенные обобщения аналогичны тем, которые были сделаны в работах [5,6] для случая волнового уравнения.

Гауссовы пучки

Перейдём от переменных z, t к *характеристическим переменным*

$\alpha = z - t$, $\beta = z + t$.

В этих переменных уравнение (1) принимает вид

$$-h^2\left(4u_{\alpha\beta} - \Delta_\perp u\right) + u = 0, \qquad (2)$$

где $\Delta_\perp$ - оператор Лапласа по $m-1$ поперечной координате.

Пусть

$$u_b = c_b \sqrt{\det \Gamma(\beta)} \exp\left[\frac{i}{h}\left(\kappa\Theta - \frac{\beta}{4\kappa}\right)\right], \qquad (3)$$

где c_b, κ - произвольные постоянные, а *фазовая функция* Θ равна

$$\Theta = \alpha + \left(\Gamma(\beta)x_\perp, x_\perp\right), \qquad (4)$$

где $x_\perp$ - $m-1$-мерный вектор поперечных координат, $\Gamma(\beta)$ - квадратная симметричная комплексная матрица размерности $(m-1)\times(m-1)$. Функция (3) удовлетворяет уравнению (2), если

$$\Gamma(\beta) = \Gamma_0\left(E + \beta\Gamma_0\right)^{-1}, \qquad (5)$$

где $\Gamma_0 = \Gamma(0)$ - постоянная невырожденная матрица, а E - единичная матрица $(m-1)\times(m-1)$. Решение (3) регулярно, если у матрицы Γ_0 нет ненулевых вещественных собственных значений, и гауссовски локализована в окрестности оси z, если κ вещественно, и матрица $\operatorname{Im}\Gamma_0$ положительно определена. В последнем случае матрица $\operatorname{Im}\Gamma(\beta)$ также положительно определена при всех β, а условие регулярности выполняется автоматически, поскольку собственные числа $\Gamma(\beta)$ имеют положительную мнимую часть, см. [5,6]. Кроме того, справедливо равенство

$$\Gamma^{-1}(\beta) = \Gamma_0^{-1} + \beta E. \qquad (6)$$

Абсолютная величина функции (3) не зависит от α:

$$|u_b| = \left|c_b \sqrt{\det \Gamma(\beta)}\right| \exp\left[-\frac{\kappa}{h}\left(\operatorname{Im}\Gamma(\beta)x_\perp, x_\perp\right)\right], \qquad (7)$$

поверхности уровня (6) движутся с единичной скоростью вдоль оси z в отрицательном направлении. Таким образом, рассматриваемое решение представляет собой движущийся гауссов пучок. В то же время направление движения поверхностей постоянной фазы за счёт первого слагаемого в (4) совпадает с направлением оси оси z, и на самой оси их скорость также равна единице.

Из (5), (6) следует, что при больших значениях $|\beta|$ $\Gamma(\beta) \sim \beta^{-1}E - \beta^{-2}\Gamma_0^{-1}$, и степень локализации в окрестности оси z уменьшается. В то же время предэкспоненциальный множитель с ростом $|\beta|$ по модулю убывает как $|\beta|^{-(m-1)/2}$. Таким образом, решение (3) в каждый момент времени сочетает гауссову локализацию по поперечным координатам и степенную по продольной. Общая энергия пучка (3) бесконечна.

Если матрица $\Gamma(\beta)$ диагональна, то $\Gamma_{jk} = \delta_{jk}\left(\beta - z_j - ib_j\right)^{-1}$ (z_j и $b_j > 0$ - вещественные константы), и тогда $\det\Gamma(\beta) = \Pi_{j=1}^{m-1}\left(\beta - z_j - ib_j\right)^{-1}$, $\Theta = \alpha + \Sigma_{j=1}^{m-1} x_j^2\left(\beta - z_j - ib_j\right)^{-1}$. Этот случай, а также приводящийся к нему ортогональным преобразованием поперечных координат, в физической литературе именуется *простым астигматизмом*. Осесимметрический (*стигматический*) случай отвечает $\Gamma(\beta) = \left(\beta - z_0 - ib\right)^{-1}E$ (z_0 и $b > 0$ - вещественные константы), тогда $\det\Gamma(\beta) = \left(\beta - z_0 - ib\right)^{-(m-1)}$, $\Theta = \alpha + x_\perp^2\left(\beta - z_0 - ib\right)^{-1}$. Такие решения рассматривались в [2].

Пакеты

Рассмотрим функцию

$$u_p^{\mu-1/2} = c_p\sqrt{\det\Gamma(\beta)}\left(\frac{\Theta + i\varepsilon}{\beta - i\gamma}\right)H_\mu^{(1)}\left(\frac{i}{h}\sqrt{(\Theta + i\varepsilon)(\beta - i\gamma)}\right), \qquad (7)$$

где c_p, μ, ε и γ - постоянные, $H_\mu^{(1)}$ - функция Ханкеля. Функции (7) могут быть получены из (3) интегрированием по параметру κ со специально подобранным весом (подобно тому, как в работе [2] это сделано для решений волнового уравнения). Прямой подстановкой можно убедиться, что (7) удовлетворяет (2). Функции (7) являются обобщением аналогичных решений, полученных в работе [3] при $m = 2$ и $m = 3$ в осесимметрическом случае. В этой работе было установлено, что такие функции при положительных ε и γ описывают решения, гауссовски локализованные не только по поперечным, но и по продольной координате, и имеющие вид волновых пакетов с конечной энергией, движущихся вдоль оси z. Указанные свойства сохраняются и в случае астигматической фазы (4). В случае полуцелых μ решение (7) выражается через элементарные функции.

Заключение

Таким образом, построены новые точные негармонические по времени решения уравнения КФГ (1), имеющие характер общеастигматических гауссовых пучков или пакетов, движущихся вдоль выделенной пространственной оси и локализованных в её окрестности. Данная работа носит характер предварительного сообщения. В настоящее время совместно с авторами работы [3] готовится статья с подробным изложением полученных результатов, которую предполагается опубликовать в одном из международных журналов.

Список литературы

1. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. — М.: Наука, ГИФМЛ, 1977.

2. Ziolkowski R. W. Exact solutions of the wave equation with complex source location // J. Math. Phys. — 1985. — Vol. 26. — P. 861-863.

3. Перель М. В., Фиалковский И. В. Экспоненциально локализованные решения уравнения Клейна-Гордона // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2001. — Т. 275. — С.187-198.

4. Arnaud J. A., Kogelnik H. Gaussian light beams with general astigmatism // Appl. Optics. — 1969. — Vol. 8. — P. 1687-1693.

5. Kiselev A. P., Plachenov A. B., Chamorro-Posada P. Nonparaxial wave beams and packets with general astigmatism // Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 85. — 043835 — P. 1-11.

6. Киселев А. П., Плаченов А. Б. Точные решения m-мерного волнового уравнения из параксиальных. Дальнейшее обобщение решения Бейтмена // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2011. — Т. 393. — С. 167-177.