

УДК 517.518.85

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ БАЗИСЫ И СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРИ ЛОКАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ОБОБЩЁННЫМИ СПЛАЙНАМИ

Исаков В.Н., ст. преподаватель, МГТУ МИРЭА, E-mail: vnisakov@rambler.ru,
Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается обобщённый подход к математическому описанию методов локальной регулярной интерполяции сигналов обобщёнными сплайнами. Конкретизированы первичные базисы и получены выражения для спектральных плотностей соответствующих порождающих функций.

Ключевые слова: локальная регулярная интерполяция, интерполяционный базис, сплайн, полиномиальная интерполяция, полигармоническая интерполяция, линейно-тригонометрическая интерполяция, обобщённый многочлен, спектр, спектральная плотность.

FUNDAMENTAL INTERPOLATING BASES AND SPECTRAL ANALYSIS AT LOCAL INTERPOLATION WITH GENERALIZED SPLINES

Isakov V.N., senior lecturer, MSTU MIREA, E-mail: vnisakov@rambler.ru
Moscow, Russia

Abstract. The generalized approach to the mathematical description of methods of local regular interpolation signals with generalized splines is considered. Specified primary bases and obtain expressions for the spectral densities of the corresponding generating functions.

Keywords: Local regularity interpolation, interpolation basis, spline, polynomial interpolation, polyharmonic interpolation, linear trigonometric interpolation, generalized polynomial, spectrum, spectral density.

Введение

Классические математические подходы к задачам интерполяции подробно изложены в работе [1]. С историческим развитием теории интерполяции можно ознакомиться в [14]. Одним из перспективных современных направлений в теории интерполирования является сплайновая интерполяция. Математические свойства сплайнов подробно исследованы в [10], [7]. Практические аспекты сплайновой интерполяции рассматриваются в [12]. Основная часть указанных работ по сплайнам посвящена глобальной интерполяции. Локальная сплайновая интерполяция рассматривается в [9] применительно к характеристикам летательных аппаратов, [2],[13], [15],[16] применительно к сигналам. В [11] рассматривается оценивание производной сигнала по его дискретным значениям на основе локальной полиномиальной интерполяции. Локальной регулярной сплайновой интерполяции посвящены ранние работы автора [3],[4],[6].

В статье рассматривается задача регулярной интерполяции сигнала со спектром ограниченной частотой ω_m при его корректной дискретизации. Известно, что такая за-

дача имеет единственное решение, представленное интерполяционным рядом Котельникова. Однако, интерполяция на основе ряда Котельникова является глобальной, что затрудняет её практическую реализацию и приводит к поиску приближённых решений, при котором предпочтение отдаётся локальным методам интерполяции.

При регулярной интерполяции сетка дискретизации равномерна и бесконечна, а на каждом частном интервале дискретизации формирование интерполирующей функции осуществляется по одним и тем же правилам. Обозначим узлы сетки $t_n = nT$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где T - период дискретизации сигнала, $s_n = s(nT)$ - отсчёты сигнала. Выражение для интерполирующей функции записывается в виде:

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n \phi_0(t - t_n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) \phi_0(t - nT) \quad (1)$$

где функция $\phi_0(t)$ порождающая функция, удовлетворяющая условию

$$\phi_0(kT) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{cases} \quad (2)$$

Сходимость интерполяционного процесса при неограниченном уменьшении периода дискретизации обеспечивается при выполнении условия [8]:

$$\Phi_0\left(\frac{2\pi k}{T}\right) = \begin{cases} T, & k = 0 \\ 0, & k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{cases} \quad (3)$$

где $\Phi_0(\omega)$ - спектральная плотность $\phi_0(t)$.

Из условий (2),(3) следуют нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0(t) dt = T, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(\omega) d\omega = 2\pi \quad (4)$$

В дальнейшем интерполяция рассматривается изотропной, то есть предполагающей «равноправие» значений сигнала предшествующих и последующих любому выбранному моменту времени. При этом порождающая функция и её спектральная плотность являются чётно-симметричными и действительными функциями.

Рассматривая преобразование Фурье (1), с учётом свойств линейности и временно-го запаздывания для спектральной плотности интерполирующей функции запишем:

$$\Psi(\omega) = \Phi_0(\omega) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) e^{-j\omega nT}$$

Поскольку спектр дискретного сигнала

$$S_{\delta}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) e^{-j\omega nT} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(\omega - \omega_{\delta})$$
, где $\omega_{\delta} = \frac{2\pi}{T}$ - частота дискретизации, $S(\omega)$ - спектральная плотность сигнала $s(t)$, последнее выражение перепишем в виде:

$$\Psi(\omega) = S_{\delta}(\omega) \Phi_0(\omega) = \Phi_0(\omega) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(\omega - \omega_{\delta})$$
. (5)

Спектральная плотность интерполирующей функции $\Psi(\omega)$ представляет собой результат выделения спектра исходного сигнала $S(\omega)$ из спектра дискретного сигнала $S_{\delta}(\omega)$ путём умножения на спектральную плотность порождающей функции $\Phi_0(\omega)$. Спектральная плотность порождающей функции $\Phi_0(\omega)$ должна быть известна при исследовании, возникающих при выборе метода интерполяции, вопросов сходимости [8], вопросов спектрального анализа восстановленного сигнала [5], а также при исследовании искажений при восстановлении сигнала.

1. Локальные фундаментальные интерполяционные обобщённые сплайн-базисы

При сплайновой интерполяции фрагменты интерполирующей функции $\psi_n(t)$, описывающие её на каждом частном интервале дискретизации $t \in [t_n, t_{n+1}]$, стыкуются в узлах интерполяции так, чтобы вместе с условием согласованности (2) обеспечить непрерывность её первых r производных (значение r характеризует степень гладкости):

$$\begin{aligned} \psi_n(t_n) &= s_n ; \quad \psi_n(t_{n+1}) = s_{n+1} ; \\ \psi_n'(t_n) &= \sum_{m=-M}^M d_m^{(1)} s_{n+m} ; \quad \psi_n'(t_{n+1}) = \sum_{m=-M}^M d_m^{(1)} s_{n+1+m} ; \\ &\dots \\ \psi_n^{(r)}(t_n) &= \sum_{m=-M}^M d_m^{(r)} s_{n+m} ; \quad \psi_n^{(r)}(t_{n+1}) = \sum_{m=-M}^M d_m^{(r)} s_{n+1+m} ; \end{aligned} \quad (6)$$

где $\{d_m^{(i)}\}_{m=-M}^M$ - коэффициенты линейного алгоритма оценки i -й производной сигнала, M - порядок алгоритма оценки производных.

На рис.1 показан пример интерполяционного фрагмента. Фрагмент $\psi_n(t)$ интерполирующей функции определяется значениями M предшествующих и M последующих относительно интервала $t \in [t_n, t_{n+1}]$ отсчётов

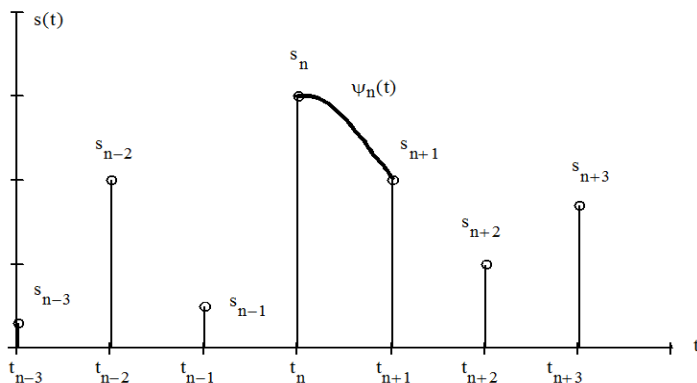
$s_{n-M}, \dots, s_{n-1}, s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \dots, s_{n+M+1}$ где $M \geq 0$ - порядок интерполяции, и представляет собой обобщённый многочлен:

$$\psi_n(t) = \sum_{k=0}^{N-1} C_{n,k} w_k(t - t_n), \quad (7)$$

где $\{w_k(t)\}_{k=0}^{N-1}$ - линейно-независимая система функций (первичный базис), $C_{n,k}$ - коэффициенты, которые ввиду (1) линейно связаны с отсчётами сигнала:

$$C_{n,k} = \sum_{m=-M}^{M+1} a_{m,k} s_{n+m}, \quad (8)$$

$a_{m,k}$ - постоянные, определяемые методом интерполяции и одинаковые для каждого



частного интервала дискретизации.

Рис.1. Локальная интерполяция обобщёнными сплайнами

Порядок обобщенного многочлена определяется количеством уравнений в (6) и связан со степенью гладкости $N = 2r + 2$. (9)

Рассматривая восстановление единичного отсчёта, для порождающей функции получим:

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} a_{(M+1),k} w_k(t - t_{-(M+1)}), t \in [t_{-(M+1)}, t_{(-M)}] \\ \dots \\ \sum_{k=0}^{N-1} a_{0,k} w_k(t - t_0), t \in [t_0, t_1] \\ \dots \\ \sum_{k=0}^{N-1} a_{(-M),k} w_k(t - t_M), t \in [t_M, t_{M+1}] \end{cases}, \quad (10)$$

где коэффициенты определяются из решения матричного уравнения

$$A = W^{-1} D, \quad (11)$$

в котором

$$A = \begin{bmatrix} a_{-M,0} & a_{-M+1,0} & \dots & a_{M+1,0} \\ a_{-M,1} & a_{-M+1,1} & \dots & a_{M+1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-M,N-1} & a_{-M+1,N-1} & \dots & a_{M+1,N-1} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{1,0} & \dots & w_{N-1,0} \\ w_{0,1} & w_{1,1} & \dots & w_{N-1,1} \\ w_{0,0} & w_{1,0} & \dots & w_{N-1,0} \\ w_{0,1} & w_{1,1} & \dots & w_{N-1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{0,0}^{(r)} & w_{1,0}^{(r)} & \dots & w_{N-1,0}^{(r)} \\ w_{0,1}^{(r)} & w_{1,1}^{(r)} & \dots & w_{N-1,1}^{(r)} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ d_{-M}^{(1)} & \dots & d_{-1}^{(1)} & d_0^{(1)} & d_1^{(1)} & d_2^{(1)} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & d_{-2}^{(1)} & d_{-1}^{(1)} & d_0^{(1)} & d_1^{(1)} & \dots & d_M^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{-M}^{(r)} & \dots & d_{-1}^{(r)} & d_0^{(r)} & d_1^{(r)} & d_2^{(r)} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & d_{-2}^{(r)} & d_{-1}^{(r)} & d_0^{(r)} & d_1^{(r)} & \dots & d_M^{(r)} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где $w_{k,m}^{(i)} = w_k^{(i)}(mT)$, $a_{m,k} = [A]_{k,m+M}$.

Когда найдена порождающая функция для каждого интерполирующего фрагмента, в виду (1), запишем:

$$\psi_n(t) = \sum_{m=-M}^{M+1} s_{n+m} \phi_0(t - (n+m)T) \quad (13)$$

2. Спектральная плотность порождающей функции при полиномиальной сплайновой интерполяции

При полиномиальной сплайновой интерполяции первичный базис образован степенными функциями $w_k(t) = t^k, k = 0, \dots, N-1$ и (10) можно переписать в виде:

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \psi_{-(M+1)}(t), t \in [t_{-(M+1)}, t_{(-M)}] \\ \dots \\ \psi_0(t), t \in [t_0, t_1] \\ \dots \\ \psi_M(t), t \in [t_M, t_{M+1}] \end{cases}, \quad (14)$$

где $\psi_n(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_{(-n),k} (t - t_n)^k$ - фрагмент порождающей функции.

Производная фрагмента порождающей функции порядка $l < N$ описывается выра-

жением:

$$\psi_n^{(l)}(t) = \sum_{k=l}^{N-1} A_k^l a_{(-n),k} (t - t_n)^{k-l}, \quad (15)$$

где $A_k^l = \frac{k!}{(k-l)!}$ - количество размещений из K по L .

В виду (6) порождающая функция (14) допускает r непрерывных дифференцирований. Производная порядка $r+1$ будет иметь разрывы в моменты дискретизации, а, начиная с $r+2$ -ого дифференцирования в эти моменты времени появятся дельта-функции. Выражение для N -й производной порождающей функции получим из (14),(15) в виде:

$$\phi_0^{(N)}(t) = \sum_{l=0}^r \sum_{n=-(M+1)}^{M+1} \Delta_{n,2r-l+1} \delta^{(l)}(t - t_n), \quad (16)$$

где $\Delta_{n,l} = \psi_n^{(l)}(t_n) - \psi_{n-1}^{(l)}(t_n) = l! a_{(-n),l} - \sum_{k=l}^{N-1} A_k^l a_{-(n-1),k} T^{k-l}; \quad l = r+2, \dots, N;$
 $a_{n,k} = 0$ при $n < -(M+1)$ и $n > M$.

Взяв преобразование Фурье (16), используя теоремы линейности, запаздывания и дифференцирования, для спектральной плотности порождающей функции получим выражение:

$$\Phi_0(\omega) = \sum_{l=0}^r \sum_{n=-(M+1)}^{M+1} \frac{\Delta_{n,2r-l+1} e^{-j\omega t_n}}{(j\omega)^{N-l}}.$$

Так как порождающая функция чётно-симметрична, то полученное выражение даёт действительный результат:

$$\begin{aligned} \Phi_0(\omega) &= \sum_{l=0}^r \sum_{n=-(M+1)}^{M+1} \frac{\Delta_{n,r+l+1}}{\omega^{N-l}} \cos\left(\omega t_n + (N-l)\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \sum_{l=0}^r \frac{1}{\omega^{N-l}} \left(\Delta_{0,r+l+1} \cos\left((N-l)\frac{\pi}{2}\right) + 2 \sum_{n=1}^{M+1} \Delta_{n,r+l+1} \cos\left(\omega t_n + (N-l)\frac{\pi}{2}\right) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Примеры графиков порождающих функций и их спектральных плотностей при полиномиальной сплайновой интерполяции показаны на рис.2.

3. Спектральная плотность порождающей функции при полигармонической сплайновой интерполяции

В случае полигармонической сплайновой интерполяции в качестве первичного базиса рассмотрим систему тригонометрических функций вида:

$$w_k(t) = \cos\left(\omega_k \left(t - \frac{T}{2}\right) + \theta_k\right), \quad k=0, \dots, N-1, \quad (18)$$

где $\omega_k = \frac{\pi k}{(N-1)T}$; $\theta_k = \frac{\pi k}{2}$.

Выражение для интерполирующего фрагмента в (14) теперь запишется следующим образом:

$$\psi_n(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_{(-n),k} \cos\left(\omega_k \left(t - t_n - \frac{T}{2}\right) + \theta_k\right). \quad (19)$$

Спектральную плотность порождающей функции найдём с учётом теорем линейности, запаздывания и смещения спектра для преобразования Фурье:

$$\Phi_0(\omega) = \frac{T}{2} \sum_{n=-(M+1)}^M \sum_{k=0}^{N-1} a_{(-n),k} \left(\operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega - \omega_k)T}{2}\right) e^{j\theta_k} + \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega + \omega_k)T}{2}\right) e^{-j\theta_k} \right) e^{-j\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega T}$$

Поскольку порождающая функция обладает чётной симметрией, последнее выражение перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_0(\omega) = & \frac{T}{2} \sum_{n=-(M+1)}^M \sum_{k=0}^{N-1} a_{(-n),k} \left(\operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega - \omega_k)T}{2}\right) \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega T - \theta_k\right) + \right. \\ & \left. + \operatorname{sinc}\left(\frac{(\omega + \omega_k)T}{2}\right) \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega T + \theta_k\right) \right). \quad (20) \end{aligned}$$

Примеры графиков порождающих функций и их спектральных плотностей при полигармонической сплайновой интерполяции показаны на рис.3.

4. Спектральная плотность порождающей функции при линейно-тригонометрической сплайновой интерполяции

Первичный базис при линейно-тригонометрической интерполяции образуем на основе системы функций

$$w_0(t) = 1, \quad w_1(t) = t, \quad w_k(t) = \cos\left(\omega_k \left(t - \frac{T}{2}\right) + \theta_k\right), \quad k=2, \dots, N-1, \quad (21)$$

где $\omega_k = \frac{\pi(k-1)}{(N-1)T}$ и $\theta_k = \frac{\pi(k-1)}{2}$.

Выражение для интерполирующего фрагмента порождающей функции, представленной в виде (14), запишется в виде:

$$\psi_n(t) = a_{(-n),0} + a_{(-n),1} \left(t - t_n\right) + \sum_{k=2}^{N-1} a_{(-n),k} \cos\left(\omega_k \left(t - t_n - \frac{T}{2}\right) + \theta_k\right). \quad (22)$$

Используя теоремы спектрального анализа и учитывая чётную симметрию порождающей функции, найдём выражение для её спектральной плотности:

$$\begin{aligned} \Phi_0(\omega) = & \sum_{n=-(M+1)}^M \left(\frac{T}{2} \sum_{k=2}^{N-1} a_{(-n),k} \left(\operatorname{sinc} \left(\frac{(\omega - \omega_k)T}{2} \right) \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \omega T - \theta_k \right) \right) + \right. \\ & \left. + \operatorname{sinc} \left(\frac{(\omega + \omega_k)T}{2} \right) \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \omega T + \theta_k \right) \right) - \\ & - \frac{1}{\omega} \left(a_{(-n),0} \sin(n\omega T) - (a_{(-n),0} + a_{(-n),1} T) \sin((n+1)\omega T) \right) - \\ & - \frac{1}{\omega} a_{(-n),1} T \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \sin((n+1/2)\omega T) \end{aligned} \quad (23)$$

Примеры графиков порождающих функций и их спектральных плотностей при линейно-тригонометрической сплайновой интерполяции показаны на рис.4.

Заключение

В статье предложен единый обобщённый подход к математическому описанию методов локальной регулярной интерполяции сигналов обобщёнными сплайнами. Предложенный подход позволяет осуществлять формирование локальных фундаментальных интерполяционных сплайн-базисов: по заданной степени гладкости r определяется необходимая размерность N и выбирается сама система функций $\{w_k(t)\}_{k=0}^{N-1}$. Порядок интерполяции M определяется методом оценки производных сигнала в узлах стыковки интерполирующих фрагментов. Коэффициенты, определённые в (11) подставляют в (10), что и даёт порождающую функцию. При формировании фундаментальных базисов особое внимание уделяется вопросам сходимости. Сходимость при регулярной интерполяции исследуется в работе [8]: анализ сходимости основан на спектральном анализе порождающей функции.

В рамках предложенного обобщённого подхода, рассмотрены случаи полиномиальной, полигармонической и линейно-тригонометрической локальной регулярной сплайновой интерполяции, конкретизированы первичные базисы, получены выражения для спектральных плотностей соответствующих порождающих функций, приведены некоторые наглядные иллюстрации полученных результатов. За рамками статьи остались вопросы о выборе степени гладкости, порядка интерполяции и интерполяционного базиса. Одним из путей решения задачи выбора интерполяционного базиса является формирование базиса, оптимального по тому или иному критерию, определяемому спецификой решаемой задачи, в рамках которой используется интерполяция.

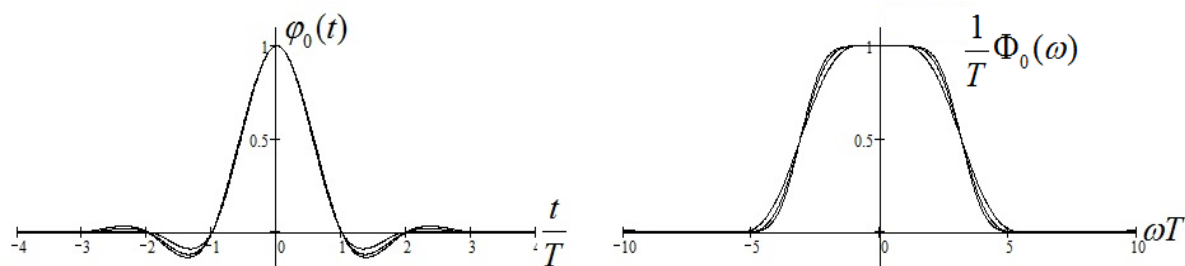


Рис.2. Графики порождающей функции и её спектральной плотности при полиномиальной сплайновой интерполяции 1-й степени гладкости 1,2,3-го порядка.

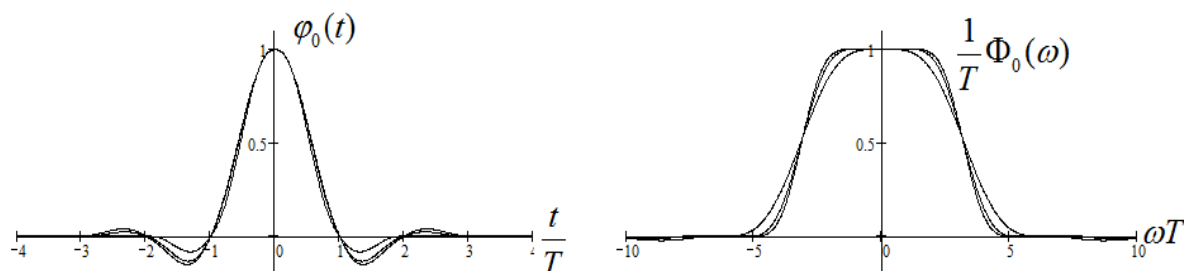


Рис.3. Графики порождающей функции и её спектральной плотности при полигармонической сплайновой интерполяции 2-й степени гладкости 1,2,3-го порядка.

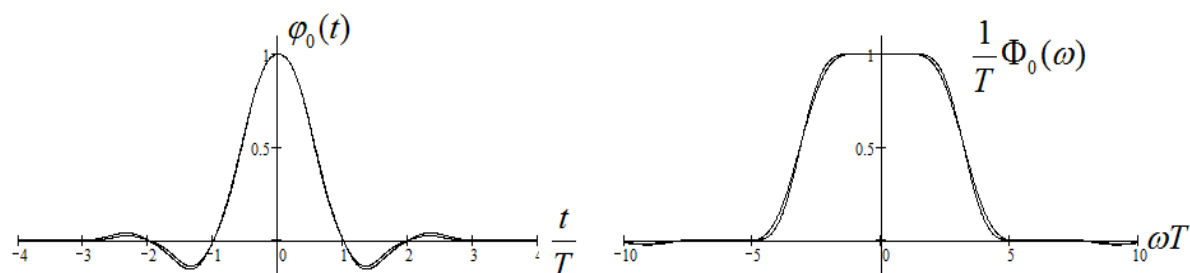


Рис.4. Графики порождающей функции и её спектральной плотности при линейно-тригонометрической сплайновой интерполяции 3-й степени гладкости 2 и 3-го порядка.

Список литературы

1. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. – М.: Государственное издательство теоретико-технической литературы, 1954.
2. Денисенко А.Н. Сигналы. Теоретическая радиотехника. Справочное пособие. – М.: Горячая линия-Телеком, 2005.
3. Денисенко А.Н., Исаков В.Н. Применение различных методов восстановления непрерывных сигналов по их дискретным значениям // Радиотехника. – 2001. – №10. – с.16-20.
4. Денисенко А.Н., Исаков В.Н. Сравнительный анализ методов восстановления непрерывных сигналов по их дискретным значениям, основанных на локальных сплайнах различной степени гладкости // Вопросы повышения эффективности радиоэлек-

тронных систем: межвузовский сборник научных трудов / Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет). – М.: 2001. – с.101 – 106.

5. Денисенко А.Н., Исаков В.Н. Методы спектрального анализа дискретных сигналов // 51 научно-техническая конференция МИРЭА. Сборник трудов. Часть II. Физико-математические науки. Технические науки / Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет) – М.: 2002. – с.90 – 94.

6. Денисенко А.Н., Исаков В.Н. Методы сплайновой интерполяции сигналов // 52 научно-техническая конференция МИРЭА. Сборник трудов. Ч.2. Физико-математические науки. / Моск. гос. ин-т радиотехники, электроники и автоматики (технический университет). – М.: 2003. – с.79 – 84

7. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980.

8. Исаков В.Н. Сходимость при регулярной интерполяции и локальные интерполяционные базисы // Научно-технические технологии. – №4. – 2013. – с. 40-46.

9. Методы анализа характеристик летательных аппаратов / Б.И. Сухорученков, В.А. Меньшиков. – М.: Машиностроение, 1995.

10. Ahlberg J. H., Nilson E. N. and Walsh J. L. The Theory of Splines and Their Applications, Academic Press, New York, 1967.

11. Antoniou A. Digital Filters: Analysis and Design, McGraw-Hill, 1979.

12. Carl de Boor A practical guide to splines, Applied Mathematical Sciences, vol. 27, Springer-Verlag, New York, 1978.

13. R. E. Crochiere & L. R. Rabiner "Interpolation and Decimation of Digital Signals|A Tutorial Review", *Proceedings of the IEEE*, vol. 69, no. 3, pp. 300-331, 1981.

14. Mejerling E. A. Chronology of Interpolation: From Ancient Astronomy to Modern Signal and Image Processing //Proc. of the IEEE.— March 2002.— V. 90.— №3.— P. 329–342, 2002.

15. R.W. Schafer & L. R. Rabiner "A Digital Signal Processing Approach to Interpolation", *Proceedings of the IEEE*, vol. 61, no. 6, pp. 692-702, 1973.

16. Unser M. Splines: a perfect fit for signal and imageprocessing // *IEEE Signal Processing Magazine*.—V. 16.— №6.— P. 22–38, 1999.