УДК 531.391

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПРИЛИВНОЙ ЭВОЛЮЦИИ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

Шатина А. В., д.ф.-м.н., профессор, Email: shatina_av@mail.ru
Шерстнев Е. В., аспирант, Email: sherevv@gmail.com
Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики (МГТУ МИРЭА), Москва

Аннотация. В работе исследуется приливная эволюция орбитального движения в системе планета-спутник. Планета моделируется однородным изотропным вязкоупругим телом, имеющим шаровую форму в естественном недеформированном состоянии, а спутник - материальной точкой. Методами аналитической механики получена система уравнений движения. Проведено исследование устойчивости стационарных движений. Получена оценка эволюции больших полуосей орбит планет Солнечной системы.
Ключевые слова: приливная эволюция, эволюция движения, переменные Делоне, орбита спутника, вязкоупругое тело, диссипация, стационарное движение, устойчивость.

ABOUT ONE MODEL TIDAL EVOLUTION MOTION OF CELESTIAL BODIES

Shatina Albina V., D. of Physical and Mathematical Sciences, proff., Email: shatina_av@mail.ru
Sherstnev Evgeny V., postgraduate, Email: sherevv@gmail.com
Moscow State Technical University of Radio Engineering, Electronics and Automation (MSTU MIREA), Moscow

Abstract. The subject of this paper is the tidal evolution of the orbital motion in a planet-satellite system. The planet is modeled as an isotropic viscoelastic body, which has a spherical form in its natural non-deformed state, and the satellite is modeled as a material point. The system of equations describing the motion of the system is derived by applying methods of analytical mechanics. The stability of stationary motions investigated. An estimate of the evolution of semi-major axes of the orbits of the planets of the Solar system is obtained.
Keywords: tidal evolution, evolution of the motion, Delaunay variables, orbit of a satellite, viscoelastic body, dissipation, stationary motion, stability.

Одной из классических задач небесной механики является задача двух тел, в которой изучается движение двух материальных точек, притягивающихся одна к другой по закону всемирного тяготения Ньютона. Эта задача является основной в проблеме движения планет Солнечной системы, а также спутников планет, так как в большинстве случаев силы взаимного притяжения между планетами, спутниками планет, между планетами и спутниками других планет малы по сравнению с силами гравитационного притяжения планеты и Солнца, планеты и ее спутника.

Интегрирование дифференциальных уравнений движения в задаче двух тел сводится к квадратурам. Для орбит планет справедлив первый закон Кеплера: планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце. Кеплеровское движение планеты или спутника называют еще невозмущенным движением.

Одним из важнейших возмущающих факторов движения небесных тел является наличие приливных сил. Поскольку небесные тела обладают протяженностью и не являются абсолютно твердыми, то возникает деформация, приводящая к образованию приливного горба. Механизм приливной эволюции можно описать следующим образом. Движение спутника вокруг планеты создает горбы в вязкоупругом теле планеты. Эти горбы стремятся расположиться по линии, соединяющей центр масс планеты и спутник. Из-за вращения планеты относительно собственного центра масс они перемещаются в теле планеты в направлении, противоположном ее вращению. В силу наличия внутреннего вязкого трения эти процессы сопровождаются рассеянием энергии, что является причиной динамической эволюции системы.

Исследование приливной эволюции системы планета-спутник проводилось ранее многими авторами с использованием различных моделей для приливного потенциала и момента приливных сил [1-4]. В данной работе используются методы, предложенные Вильке В.Г. в монографии [5]. Ранее этот подход был применен к ряду задач, в частности к задачам о поступательно-вращательном движении шара в центральном ньютоновском поле сил [6,7], о поступательно-вращательном движении двух вязкоупругих планет в гравитационном поле сил взаимного притяжения [8].

1. Постановка задачи. Уравнения движения

Рассмотрим задачу о движении системы планета-спутник в гравитационном поле взаимного притяжения. Планету будем моделировать однородным изотропным вязкоупругим телом, имеющим шаровую форму в естественном недеформированном состоянии, а спутник - материальной точкой P. Пусть m, μ - массы планеты и спутника соответственно, r_0 - радиус планеты, ρ - ее плотность ($m = 4\rho\pi r_0^3/3$).

Введем инерциальную систему координат $OXYZ$ с началом в центре масс системы. Для описания вращательного движения планеты введем подвижную систему координат $Cx_1x_2x_3$ с началом в ее центре масс и систему осей Кенига $C\xi_1\xi_2\xi_3$. Положим $\mathbf{R} = \mathbf{CP}$.

Радиус-векторы точки P и точки M вязкоупругой планеты в инерциальной системе координат имеют вид:

$$\mathbf{R}_P = \frac{m}{m+\mu}\mathbf{R},$$
$$\mathbf{R}_M = -\frac{\mu}{m+\mu}\mathbf{R} + \Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u}), \tag{1.1}$$

где Γ - оператор перехода от системы координат $Cx_1x_2x_3$ к системе осей Кенига, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ - вектор упругого смещения планеты.

Следующие условия однозначно определяют радиус-вектор центра масс деформированной планеты и связанную с ней систему координат $Cx_1x_2x_3$ [5]:

$$\mathbf{OC} = \frac{1}{m}\int_V \mathbf{R}_M(\mathbf{r},t)\rho dv,$$
$$\int_V \mathbf{u} dv = \mathbf{0}, \ \int_V \operatorname{rot}\mathbf{u} dv = \mathbf{0}, \tag{1.2}$$

где $V = \left\{ \mathbf{r} \in E^3 : |\mathbf{r}| \le r_0 \right\}$.

Потенциальная энергия гравитационного поля определяется функционалом

$$\Pi = -\mu\int_V \frac{f\rho dv}{|\mathbf{R} - \Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})|}, \tag{1.3}$$

где f - универсальная гравитационная постоянная.

Функционал потенциальной энергии упругих деформаций введем в соответствии с линейной моделью теории упругости:

$$\mathsf{E} = \int_V \mathsf{E}[\mathbf{u}]dv, \ \mathsf{E}[\mathbf{u}] = \alpha_1\left(I_E^2 - \alpha_2 II_E\right), \tag{1.4}$$

$$\alpha_1 = \frac{\mathrm{E}(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}, \ \alpha_2 = \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu},$$

$$I_E = \sum_{i=1}^{3} e_{ii}, \ II_E = \sum_{i<j}\left(e_{ii}e_{jj} - e_{ij}^2\right),$$
$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

E - модуль упругости Юнга, ν - коэффициент Пуассона деформируемой планеты, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Для описания диссипативных свойств планеты введем диссипативный функционал, соответствующий модели Кельвина-Фойгта: $\mathsf{D}[\dot{\mathbf{u}}] = \chi\mathsf{E}[\dot{\mathbf{u}}]$, χ - коэффициент внутреннего вязкого трения.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы получим из вариационного принципа Даламбера-Лагранжа [1]:

$$\int_V \left(\ddot{\mathbf{R}}_M,\, \delta\mathbf{R}_M\right)\rho dv + \mu\left(\ddot{\mathbf{R}}_P,\, \delta\mathbf{R}_P\right) + \delta\Pi +$$
$$+\int_V \left(\nabla_{\mathbf{u}}\mathsf{E}[\mathbf{u}] + \nabla_{\dot{\mathbf{u}}}\mathsf{D}[\dot{\mathbf{u}}] + \boldsymbol{\lambda}_1, \delta\mathbf{u}\right) dv + \tag{1.5}$$
$$+\int_V \left(\boldsymbol{\lambda}_2, \operatorname{rot}\delta\mathbf{u}\right) dv = 0,$$

где $\boldsymbol{\lambda}_1$, $\boldsymbol{\lambda}_2$ - неопределенные множители Лагранжа, порожденные условиями (1.2).

Из равенств (1.1) получим:

$$\ddot{\mathbf{R}}_M = -\frac{\mu}{m+\mu}\ddot{\mathbf{R}} +$$
$$+\Gamma\{\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})] +$$
$$+2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u}) + \ddot{\mathbf{u}}\},$$

$$\delta\mathbf{R}_M = -\frac{\mu}{m+\mu}\delta\mathbf{R} +$$
$$+\Gamma\left\{\delta\boldsymbol{\alpha}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u}) + \delta\mathbf{u}\right\},$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_P = \frac{m}{m+\mu}\ddot{\mathbf{R}},\ \delta\mathbf{R}_P = \frac{m}{m+\mu}\delta\mathbf{R}. \tag{1.6}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}\times(\cdot) = \Gamma^{-1}\dot{\Gamma}(\cdot)$, $\delta\Gamma\times(\cdot) = \Gamma\left[\delta\boldsymbol{\alpha}\times(\cdot)\right]$. Подставляя (1.6) в (1.5) и приравнивая коэффициенты при независимых вариациях $\delta\mathbf{R}, \delta\boldsymbol{\alpha}, \delta\mathbf{u}$, получим уравнения движения системы планета – спутник:

$$\frac{\mu m}{\mu+m}\ddot{\mathbf{R}} + \mu f\int_V \frac{\mathbf{R}-\Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})}{\left|\mathbf{R}-\Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})\right|^3}\rho dv = \mathbf{0}, \tag{1.7}$$

$$\dot{\mathbf{L}} - \mu f\int_V \frac{\Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})\times(\mathbf{R}-\Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u}))}{\left|\mathbf{R}-\Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})\right|^3}\rho dv = \mathbf{0}, \tag{1.8}$$

$$\int_V \left(\rho\Gamma^{-1}\ddot{\mathbf{R}}_M - \mu\rho f\,\frac{\Gamma^{-1}\mathbf{R}-(\mathbf{r}+\mathbf{u})}{\left|\Gamma^{-1}\mathbf{R}-(\mathbf{r}+\mathbf{u})\right|^3}\right) dv +$$
$$+\int_V \left(\nabla_{\mathbf{u}}\mathsf{E}[\mathbf{u}+\chi\dot{\mathbf{u}}] + \boldsymbol{\lambda}_1, \delta\mathbf{u}\right) dv +$$
$$+\int_{\partial V} (\boldsymbol{\lambda}_2\times\mathbf{n})\cdot\delta\mathbf{u}\, d\sigma = \mathbf{0}, \tag{1.9}$$

где $\mathbf{L}=\int\limits_V \Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})\times\frac{d}{dt}\left[\Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})\right]\rho dv$ - вектор кинетического момента планеты относительно центра масс, ∂V - граница области V, $\mathbf{n}$ - единичный вектор внешней нормали к ∂V. При получении уравнений (1.7)-(1.9) были учтены условия (1.2).

2. Построение возмущенной системы уравнений движения

Считаем, что жесткость деформируемой планеты велика, т.е. мал безразмерный параметр $\varepsilon=\rho\omega_0^2 r_0^2 \mathrm{E}^{-1}$, где ω_0 - величина модуля начальной угловой скорости планеты. Выбрав соответствующим образом масштабы размерных величин, можно получить $\varepsilon=\mathrm{E}^{-1}$. При $\varepsilon=0$ вектор упругого смещения $\mathbf{u}$ полагается равным нулю. Тогда получим задачу о движении механической системы, состоящей из абсолютно твердого шара и материальной точки в гравитационном поле взаимного притяжения. Уравнения движения невозмущенной задачи имеют вид:

$$\ddot{\mathbf{R}}+\frac{f(\mu+m)}{R^3}\mathbf{R}=0,\quad A\dot{\boldsymbol{\omega}}=0, \tag{2.1}$$

где $A=0,4mr_0^2$ - момент инерции шара относительно диаметра, $R=|\mathbf{R}|$.

При $\varepsilon\neq 0$ согласно методу разделения движений для систем с бесконечным числом степеней свободы [5] из уравнения (1.9) будем искать вектор-функцию $\mathbf{u}$, описывающую квазистатические деформации планеты под действием внешних сил и сил инерции в виде:

$$\mathbf{u}=\varepsilon\mathbf{u}_1+\varepsilon^2\mathbf{u}_2+\cdots.$$

При этом множители Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2$ также ищем в виде разложений по степеням малого параметра ε:

$$\boldsymbol{\lambda}_1=\boldsymbol{\lambda}_{10}+\varepsilon\boldsymbol{\lambda}_{11}+\cdots,\quad \boldsymbol{\lambda}_2=\boldsymbol{\lambda}_{20}+\varepsilon\boldsymbol{\lambda}_{21}+\cdots.$$

Полагая в (1.9) последовательно $\delta\mathbf{u}=\delta\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r},\ \delta\mathbf{u}=\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{E}^3$ и учитывая, что работа упругих и диссипативных сил на бесконечно малых поворотах и поступательном движении равна нулю, получим $\boldsymbol{\lambda}_{10}=\boldsymbol{\lambda}_{20}=0$. Краевая задача для нахождения вектор-функции $\mathbf{u}_1$ первого приближения по малому параметру ε примет вид:

$$\begin{aligned}&\varepsilon\nabla_{\mathbf{u}}\mathsf{E}[\mathbf{u}_1+\chi\dot{\mathbf{u}}_1]=\frac{2}{3}\rho\omega^2\mathbf{r}+\\&+\rho\left\{\frac{1}{3}\mathbf{r}\omega^2-\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})\right\}-\frac{3\mu f\rho}{R^3}\left\{\frac{1}{3}\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{r})\right\},\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n=0, \tag{2.3}$$

где $\omega = |\boldsymbol{\omega}|,\ \boldsymbol{\xi} = \Gamma^{-1}\mathbf{R}/R$, а условие (2.3) означает равенство нулю напряжений на поверхности планеты [5,9]. При получении уравнения (2.2) было учтено условие $|\mathbf{r}| \le r_0 << R$. Заметим, что величины $\boldsymbol{\omega}, R, \boldsymbol{\xi}$, входящие в правую часть уравнения (2.2), зависят от времени согласно невозмущенной системе уравнений (2.1).

Решение квазистатической задачи теории упругости (2.2)-(2.3) имеет вид [2,7]:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{10} + \mathbf{u}_{11} + \mathbf{u}_{12}, \tag{2.4}$$

где

$$\mathbf{u}_{10} = \frac{2}{3}\rho\omega^2\left\{d_1 r^2 + d_2 r_0^2\right\}\mathbf{r},$$

$$\mathbf{u}_{11} = \rho\left\{a_1\left[\frac{1}{6}\omega^2 r^2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})^2\right]\mathbf{r} + \right.$$

$$\left. + \left[a_2 r^2 + a_3 r_0^2\right]\cdot\left[\frac{1}{3}\omega^2\mathbf{r} - (\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})\boldsymbol{\omega}\right]\right\},$$

$$\mathbf{u}_{12} \approx \mathbf{u}_{120} - \dot{\mathbf{u}}_{120},$$

$$\mathbf{u}_{120} = -\frac{3\mu f\rho}{R^3}\left\{a_1\left[\frac{1}{6}r^2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{r})^2\right]\mathbf{r} + \right.$$

$$\left. + \left[a_2 r^2 + a_3 r_0^2\right]\cdot\left[\frac{1}{3}\mathbf{r} - (\boldsymbol{\xi},\mathbf{r})\boldsymbol{\xi}\right]\right\},$$

$$d_1 = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{10(1-\nu)},$$

$$d_2 = \frac{(1-2\nu)(3-\nu)}{10(1-\nu)},$$

$$a_1 = \frac{2(1+\nu)}{5\nu+7},\ a_2 = -\frac{(2+\nu)(1+\nu)}{5\nu+7},$$

$$a_3 = \frac{(3+2\nu)(1+\nu)}{5\nu+7}.$$

Далее функцию $\mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{u}_1$, где $\mathbf{u}_1$ определяется формулой (2.4), подставим в уравнения (1.7)-(1.8), предварительно линеаризовав их по $\mathbf{u}$ и учитывая условие $|\mathbf{r} + \mathbf{u}| << R$:

$$\ddot{\mathbf{R}} + \frac{f(\mu+m)}{R^3}\mathbf{R} +$$

$$+\Gamma\int_V\left[5\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{r})(\boldsymbol{\xi},\mathbf{u}) - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},\mathbf{u}) - \right.$$

$$\left. -\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{u}) - \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{r})\right]\rho dv = 0, \tag{2.5}$$

$$\dot{\mathbf{L}} - \frac{3f\mu}{R^3}\Gamma\int_V \left\{ [\mathbf{u}\times\xi](\xi,\mathbf{r}) + [\mathbf{r}\times\xi](\xi,\mathbf{u}) \right\} \rho dv = 0\,. \qquad (2.6)$$

После вычисления тройных интегралов по шару в уравнениях (2.5)-(2.6) получим векторную систему дифференциальных уравнений, описывающих движение системы планета спутник в поле сил взаимного притяжения с учетом возмущений, вызванных упругостью и диссипацией:

$$\begin{gathered}\ddot{\mathbf{R}} + \frac{f(\mu+m)}{R^3}\mathbf{R} + \\ + \frac{3\varepsilon f\rho^2 D(\mu+m)}{mR^4}\Gamma\Big\{\xi\omega^2 + 2\boldsymbol{\omega}(\xi,\boldsymbol{\omega}) \\ -5\xi(\xi,\boldsymbol{\omega})^2 + \frac{6f\mu}{R^3}\Big[\xi + \chi\dot{\xi} + 3\chi\frac{\dot{R}}{R}\xi\Big]\Big\} = 0,\end{gathered} \qquad (2.7)$$

$$\dot{\mathbf{L}} - \frac{6\varepsilon f\mu\rho^2 D}{R^3}\Gamma\left\{ [\xi\times\boldsymbol{\omega}](\xi,\boldsymbol{\omega}) + \frac{3\chi f\mu}{R^3}\left[\xi\times\dot{\xi}\right] \right\} = 0\,, \qquad (2.8)$$

где $D = \dfrac{4\pi k(\nu) r_0^7}{105}$, $k(\nu) = \dfrac{(1+\nu)(9\nu+13)}{5\nu+7}$.

Уравнения (2.7)-(2.8) имеют первый интеграл – закон сохранения момента количества движения относительно центра масс системы:

$$\frac{m\mu}{m+\mu}\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}} + \mathbf{L} = \mathbf{G}_0\,.$$

3. Стационарное движение спутника и его устойчивость

Будем полагать, что масса планеты много больше массы спутника, и рассмотрим задачу о движении материальной точки в гравитационном поле вращающейся вязкоупругой планеты. Вектор $\boldsymbol{\Omega} = \Gamma\boldsymbol{\omega}$ будем считать постоянным. Ось OZ инерциальной системы координат направим по вектору $\boldsymbol{\Omega}$. Уравнение (2.7) для радиус-вектора $\mathbf{R}$ спутника можно записать в виде:

$$\mu\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_0 + \varepsilon\mathbf{F}_1 + \varepsilon\chi\mathbf{F}_2\,, \qquad (3.1)$$

где

$$\mathbf{F}_0 = -\frac{f\mu(m+\mu)}{R^3}\mathbf{R}\,,$$

$$\begin{gathered}\mathbf{F}_1 = -C_1\Big\{\frac{\Omega^2}{R^5}\mathbf{R} + \frac{6f\mu}{R^8}\mathbf{R} + \\ + \frac{2\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{R},\boldsymbol{\Omega})}{R^5} - \frac{5\mathbf{R}(\mathbf{R},\boldsymbol{\Omega})^2}{R^7}\Big\},\end{gathered}$$

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{C_2}{R^7}\Gamma\left\{\dot{\xi} + \frac{3\dot{R}}{R}\xi\right\},$$

$$C_1 = \frac{3f\rho^2 D\mu\left(m+\mu\right)}{m},\; C_2 = 6f\mu C_1,\; \Omega = \left|\mathbf{\Omega}\right|.$$

Заметим, что силы $\mathbf{F}_0$ и $\varepsilon\mathbf{F}_1$, входящие в правую часть уравнения (3.1), являются потенциальными:

$$\mathbf{F}_0 = \operatorname{grad} U_0,\; \mathbf{F}_1 = \operatorname{grad} U_1,$$

$$U_0 = \frac{f\mu\left(\mu+m\right)}{R},$$

$$U_1 = C_1\left\{\frac{f\mu}{R^6} + \frac{\Omega^2}{3R^3} - \frac{\left(\mathbf{R},\mathbf{\Omega}\right)^2}{R^5}\right\}.$$

Составляющая $\varepsilon\chi\mathbf{F}_2$ является неконсервативной.

Выпишем компоненты вектора $\mathbf{R}$ в сферических координатах R,β,η: $\mathbf{R} = \left(R\cos\beta\sin\eta; R\sin\beta\sin\eta; R\cos\eta\right)$. Уравнения движения спутника в сферических координатах имеют вид:

$$\begin{gathered}
\ddot{R} - R\dot{\eta}^2 - R\dot{\beta}^2\sin^2\eta + \frac{f\left(\mu+m\right)}{R^2} + \\
+\frac{\varepsilon b}{R^4}\left\{\Omega^2\left(1-3\cos^2\eta\right) + \frac{6f\mu}{R^3} + \frac{18\chi f\mu}{R^4}\dot{R}\right\} = 0, \\
\left(R\ddot{\beta} + 2\dot{R}\dot{\beta}\right)\sin\eta + 2R\dot{\beta}\dot{\eta}\cos\eta + \\
+\frac{6\varepsilon\chi bf\mu}{R^7}\sin\eta\left(\dot{\beta}-\Omega\right) = 0, \\
R\ddot{\eta} + 2\dot{R}\dot{\eta} - R\dot{\beta}^2\sin\eta\cos\eta - \\
-\frac{\varepsilon b}{R^4}\Omega^2\sin 2\eta + \frac{6\varepsilon\chi bf\mu}{R^7}\dot{\eta} = 0,
\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $b = C_1/\mu$.

Система уравнений (3.2) имеет стационарное решение:

$$\eta = \pi/2,\; \dot{\beta} = \Omega,\; R = R_*, \tag{3.3}$$

где R_* является корнем уравнения $\dfrac{f\left(\mu+m\right)}{R^3} + \dfrac{\varepsilon b\Omega^2}{R^5} + \dfrac{6\varepsilon bf\mu}{R^8} = \Omega^2$.

Полученное решение (3.3) соответствует движению спутника по круговой орбите радиуса R_* в экваториальной плоскости планеты с орбитальной скоростью, равной угловой скорости вращения планеты.

Исследуем устойчивость стационарного решения (3.3). Положим $R = R_*\left(1+x_1\right)$, $\dot{\beta} = \Omega\left(1+x_2\right)$, $\eta = \pi/2 + x_3$ и выпишем уравнения первого приближения возмущенного движения системы:

$$\ddot{x}_1 + 3b_1\dot{x}_1 - b_2 x_1 - b_3 x_2 = 0,$$
$$\dot{x}_2 + b_1 x_2 + 2\dot{x}_1 = 0,$$
$$\ddot{x}_3 + b_1\dot{x}_3 + b_4 x_3 = 0, \tag{3.4}$$

где

$$b_1 = \frac{6\varepsilon\chi bf\mu}{R_*^8},$$
$$b_2 = \Omega^2 + \frac{2f(\mu+m)}{R_*^3} + \frac{4\varepsilon b\Omega^2}{R_*^5} + \frac{42\varepsilon\chi bf\mu}{R_*^8},$$
$$b_3 = 2\Omega^2,\ b_4 = \Omega^2\left(1 + \frac{2\varepsilon b}{R_*^5}\right).$$

Решение уравнений (3.4) будем искать в виде: $x_i = A_i e^{\lambda t}\ (i = 1,2,3)$. Получим характеристическое уравнение [10]:

$$\begin{gathered}\left(\lambda^2 + b_1\lambda + b_4\right)\times\\ \times\left(\lambda^3 + 4b_1\lambda^2 + \left(3b_1^2 - b_2 + 2b_3\right)\lambda - b_1 b_2\right) = 0.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Так как $b_1 b_2 > 0$, то характеристическое уравнение (3.5) имеет положительный корень, следовательно, стационарное решение (3.3) является неустойчивым.

4. Эволюционная система уравнений движения спутника

Рассмотрим сначала невозмущенную задачу – движение спутника (материальной точки массы μ) под действием силы $\mathbf{F}_0$. Кинетическая энергия спутника имеет вид:

$$T = \frac{\mu}{2}\left\{\dot{R}^2 + R^2\sin^2\eta\cdot\dot{\beta}^2 + R^2\dot{\eta}^2\right\}.$$

От обобщенных скоростей $\dot{R}, \dot{\beta}, \dot{\eta}$ перейдем к обобщенным импульсам p_R, p_β, p_η:

$$p_R = \frac{\partial T}{\partial\dot{R}} = \mu\dot{R},$$
$$p_\beta = \frac{\partial T}{\partial\dot{\beta}} = \mu R^2\dot{\beta}\sin^2\beta,$$
$$p_\eta = \frac{\partial T}{\partial\dot{\eta}} = \mu R^2\dot{\eta}.$$

Невозмущенный гамильтониан задачи имеет вид:

$$H_0 = \frac{p_R^2}{2\mu} + \frac{p_\beta^2}{2\mu R^2 \sin^2\eta} + \\ + \frac{p_\eta^2}{2\mu R^2} - \frac{f\mu(\mu+m)}{R}. \quad (4.1)$$

От переменных $p_R, p_\beta, p_\eta, R, \beta, \eta$ перейдем к переменным Делоне L, G, H, l, g, h [7,11] с помощью соотношений:

$$p_R = \frac{\partial W}{\partial R}, p_\beta = \frac{\partial W}{\partial \beta}, p_\eta = \frac{\partial W}{\partial \eta},$$
$$g = \frac{\partial W}{\partial G}, h = \frac{\partial W}{\partial H}, l = \frac{\partial W}{\partial L},$$

где $W = W[R, \beta, \eta, L, G, H]$ - производящая функция канонического преобразования,

$$W = H\beta + \int\sqrt{G^2 - \frac{H^2}{\sin^2\eta}}d\eta + \\ + \int\sqrt{\frac{2f_0\mu^2}{R} - \frac{G^2}{R^2} - \frac{f_0^2\mu^4}{L^2}}dR,$$
$$f_0 = f(\mu+m).$$

Компоненты вектора $\mathbf{R}$ в переменных Делоне в системе координат $C\xi_1\xi_2\xi_3$ определяются равенством:

$$\mathbf{R} = \Gamma_3(h)\Gamma_1(i)\Gamma_3(g+\theta)(R,0,0)^T, \quad (4.2)$$

где

$$\cos i = \frac{H}{G}, \ e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}},$$
$$R = \frac{G^2}{f_0\mu^2(1+e\cos\theta)},$$

$$\Gamma_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\Gamma_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

e - эксцентриситет орбиты спутника, g - долгота перигелия от восходящего узла, θ - истинная аномалия, зависящая от переменных l, L, G через соотношения:

$\cos w = \dfrac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}$, $l = w - e\sin w$, в которых l - средняя аномалия, w - эксцентрическая аномалия.

Невозмущенный гамильтониан задачи (4.1) в переменных Делоне имеет вид: $H_0 = -\dfrac{f_0^2\mu^3}{2L^2}$, а дополнительный член возмущенного гамильтониана равен $\varepsilon H_1 = -\varepsilon U_1 = -\varepsilon C_1 \left\{ \dfrac{f\mu}{R^6} + \dfrac{\Omega^2}{3R^3} - \dfrac{(\mathbf{R},\mathbf{\Omega})^2}{R^5} \right\}$, где вектор $\mathbf{R}$ определяется равенством (4.2), при этом его модуль R является функцией переменных L, G, l. Таким образом, гамильтониан задачи равен

$$\mathrm{H} = H_0 + \varepsilon H_1 .$$

Канонические уравнения возмущенного движения в переменных Делоне имеют вид:

$$\begin{aligned} &\dot{L} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial l} + \varepsilon\chi Q_l, \quad &&\dot{l} = n(L) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial L} - \varepsilon\chi Q_L, \\ &\dot{G} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial g} + \varepsilon\chi Q_g, \quad &&\dot{g} = \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial G} - \varepsilon\chi Q_G, \\ &\dot{H} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial h} + \varepsilon\chi Q_h, \quad &&\dot{h} = \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial H} - \varepsilon\chi Q_H, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $n(L) = \dfrac{f_0^2\mu^3}{L^3}$, а обобщенные силы $Q_l, Q_g, Q_h, Q_L, Q_G, Q_H$ определяются из выражения для элементарной работы

$$\begin{aligned} &\delta A = \varepsilon\chi \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{R} = \\ &= \varepsilon\chi \big(Q_l\delta l + Q_g\delta g + Q_h\delta h + \\ &+ Q_L\delta L + Q_G\delta G + Q_H\delta H \big). \end{aligned}$$

После вычисления обобщенных сил и усреднения правых частей уравнений (4.3) по «быстрой» угловой переменной l получим замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных «действие» L, G, H и медленных угловых переменных g, h:

$$\dot{L} = \frac{\gamma_1 n^4}{(1-e^2)^{15/2}} \left\{ \Omega\cos i (1-e^2)^{3/2} F_2(e) - nF_3(e) \right\},$$

$$\dot{G} = \frac{\gamma_1 n^4}{(1-e^2)^6} \left\{ \Omega\cos i (1-e^2)^{3/2} F_1(e) - nF_2(e) \right\},$$

$$\dot{H} = \frac{\gamma_1 n^4}{(1-e^2)^6} \Big\{ \Omega (1-e^2)^{3/2} [F_1(e) -$$

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{3e^2}{4}+\frac{e^4}{16}\right)\sin^2 i-$$

$$-\left(\frac{3e^2}{2}+\frac{e^4}{4}\right)\sin^2 i\cdot\sin^2 g\Bigg]-F_2(e)n\cos i\Bigg\},$$

$$\dot g=\frac{\gamma_2 n^{7/3}}{\left(1-e^2\right)^2}\left\{\left(\frac{5}{2}\cos^2 i-\frac{1}{2}\right)\Omega^2+\right.$$

$$\left.+\frac{15\mu\left(1+3e^2/2+e^4/8\right)}{(m+\mu)\left(1-e^2\right)^3}n^2\right\}+$$

$$+\frac{\gamma_3 n^{13/3}\Omega}{\left(1-e^2\right)^5}\cdot\cos i\cdot\sin 2g\cdot\left\{\frac{3e^2}{2}+\frac{e^4}{4}\right\},$$

$$\dot h=-\frac{\gamma_2 n^{7/3}}{\left(1-e^2\right)^2}\Omega^2\cos i-$$

$$-\frac{\gamma_3 n^{13/3}}{\left(1-e^2\right)^5}\Omega\cdot\sin 2g\left\{\frac{3e^2}{2}+\frac{e^4}{4}\right\}. \qquad (4.4)$$

Здесь

$$n=\frac{f_0^2\mu^3}{L^3},$$

$$F_1(e)=1+3e^2+\frac{3}{8}e^4,$$

$$F_2(e)=1+\frac{15e^2}{2}+\frac{45e^4}{8}+\frac{5e^6}{16},$$

$$F_3(e)=1+\frac{31e^2}{2}+\frac{255e^4}{8}+\frac{185e^6}{16}+\frac{25e^8}{64},$$

$$\gamma_1=\frac{27\varepsilon\chi k(v)\mu^2 m r_0}{70\pi(m+\mu)},$$

$$\gamma_2=\frac{9\varepsilon k(v)mr_0}{140\pi f_0^{2/3}},\ \gamma_3=\frac{\gamma_1}{2\mu f_0^{2/3}}.$$

Заметим, что уравнение для угловой переменной h отделяется от остальных уравнений системы (4.4), правые части которых не зависят от h. Из первых трех уравнений системы (4.4) получим эволюционную систему уравнений относительно среднего движения спутника по орбите n, эксцентриситета e и наклонения орбиты i:

$$\dot n=-\frac{6\gamma_3 n^{16/3}}{\left(1-e^2\right)^{15/2}}\left\{\Omega\cos i\left(1-e^2\right)^{3/2}F_2(e)-nF_3(e)\right\},$$

$$\dot{e} = \frac{2\gamma_3 n^{13/3} e}{\left(1-e^2\right)^{13/2}} \left\{ \Omega \cos i \left(1-e^2\right)^{3/2} F_5(e) - nF_4(e) \right\}, \tag{4.5}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{2\gamma_3 n^{13/3} \sin i \cdot \Omega}{\left(1-e^2\right)^5} \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\sin^2 g \right) e^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{5}{16} - \frac{1}{4}\sin^2 g \right) e^4 \right\},$$

где

$$F_4(e) = 9 + \frac{135}{4}e^2 + \frac{135}{8}e^4 + \frac{45}{64}e^6,$$

$$F_5(e) = \frac{11}{2} + \frac{33}{4}e^2 + \frac{11}{16}e^4.$$

Система уравнений (4.5) совместно с четвертым уравнением системы (4.4) образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений 4-го порядка относительно параметров орбиты спутника n, e, i, g. Для большой полуоси орбиты справедливо равенство:

$$a = \sqrt[3]{f_0 n^{-2}}\ . \tag{4.6}$$

Из последнего уравнения системы (4.5) следует, что или $i \equiv 0$, или наклонение орбиты во все время движения монотонно уменьшается.

На рис.1 изображен фазовый портрет системы уравнений (4.5) в случае $i \equiv 0$ в плоскости переменных $(e, \tilde{n})$, где $\tilde{n} = n\Omega^{-1}$, т.е. для дифференциального уравнения

$$\frac{d\tilde{n}}{de} = -\frac{3\tilde{n}}{e\left(1-e^2\right)} \left\{ \frac{\left(1-e^2\right)^{3/2} F_2(e) - \tilde{n}F_3(e)}{\left(1-e^2\right)^{3/2} F_5(e) - \tilde{n}F_4(e)} \right\}.$$

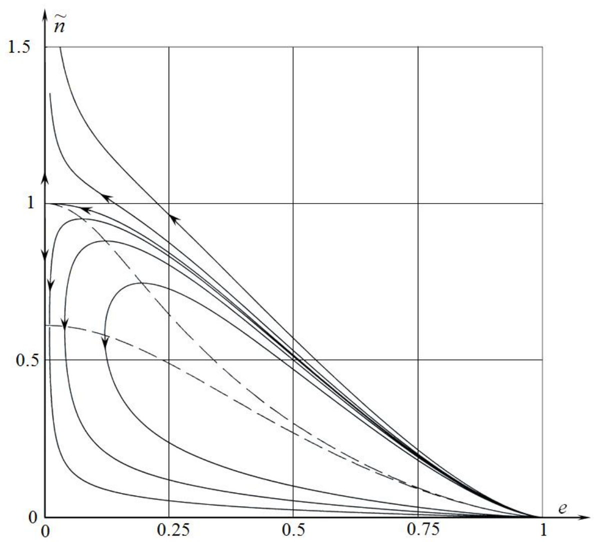

Рис. 1.

В 2004 году российскими астрономами [12] было установлено, что ежегодно Земля удаляется от Солнца в среднем на 15 сантиметров. Используя этот факт, получим средние скорости изменения больших полуосей других планет Солнечной системы в рамках рассматриваемой в данной работе модели. Из (4.5), (4.6) следует, что в случае $i \equiv 0$

$$\begin{gathered}\dot{a} = \frac{27\Delta \mu m r_0 n^{11/3}}{35\pi f^{1/3}\left(\mu+m\right)^{4/3}\left(1-e^2\right)^{15/2}} \times \\ \times\left\{\Omega\left(1-e^2\right)^{3/2} F_2\left(e\right) - nF_3\left(e\right)\right\},\end{gathered} \tag{4.7}$$

где $\Delta = \varepsilon \chi k\left(v\right)$.

Найдем значение параметра Δ, связанного с вязкоупругими свойствами Солнца, рассматривая систему Солнце-Земля и используя следующие значения параметров, входящих в уравнение (4.7) [13]:

$$\dot{a} = 15\frac{см}{год} = 4,753\cdot 10^{-9}\frac{м}{с},$$

$$\mu = 5,974\cdot 10^{24}\,кг,\ m = 1,989\cdot 10^{30}\,кг,$$

$$r_0 = 6,96\cdot 10^{8}\,м,\ f = 6,67\cdot 10^{-11}\frac{Н\cdot м^2}{кг^2},$$

$$n = 1,991\cdot 10^{-7}\frac{рад}{с},$$

$e = 0,0167,\ \Omega = 2,865\cdot 10^{-6}\frac{рад}{с}$ ($n = \frac{2\pi}{\tau}$, $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, τ=365,26 *сут* – период обращения Земли вокруг Солнца, $T = 25,38$ *сут* – сидерический период вращения Солнца). Получим $\Delta = 3,2977\cdot 10^{-5}\frac{м\cdot с^3}{кг}$.

Используя найденное значение Δ, найдем из равенства (4.7) значения $\dot{a}$ для остальных планет солнечной системы, моделируя их материальными точками. Результаты вычислений представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Планета	μ (*кг*)	e	$n\left(\frac{рад}{с}\right)$	$\dot{a}\left(\frac{см}{год}\right)$
Меркурий	$3,302\cdot 10^{23}$	0,206	$8,267\cdot 10^{-7}$	$170,39$
Венера	$4,869\cdot 10^{24}$	0,00676	$3,236\cdot 10^{-7}$	$68,95$
Земля	$5,974\cdot 10^{24}$	0,0167	$1,991\cdot 10^{-7}$	$15,0$
Марс	$6,419\cdot 10^{23}$	0,09344	$1,059\cdot 10^{-7}$	0,184
Юпитер	$1,899\cdot 10^{27}$	0,04890	$1,678\cdot 10^{-8}$	$0,602$

Сатурн	$5{,}685 \cdot 10^{26}$	0.05689	$6{,}712 \cdot 10^{-9}$	$6{,}364 \cdot 10^{-3}$
Уран	$8{,}663 \cdot 10^{25}$	0.04634	$2{,}369 \cdot 10^{-9}$	$2{,}103 \cdot 10^{-5}$
Нептун	$1{,}028 \cdot 10^{26}$	0,01129	$1{,}210 \cdot 10^{-9}$.	$2{,}069 \cdot 10^{-6}$

Список литературы

1. Приливы и резонансы в Солнечной системе. / Сборник статей под редакцией В.Н. Жаркова. − М.: Мир, 1975. − 286 с.
2. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. − 308 с.
3. Марков Ю.Г., Миняев И.С. Роль приливной диссипации в движении планет и их спутников // Астрономический вестник. − 1994. − Т. 28, №2. − С. 59-72.
4. Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 588 с.
5. Вильке В.Г. Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Ч 1,2. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1997. Ч1 − 216 с. Ч2 − 160 с.
6. Вильке В.Г. Движение вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил // Прикладная математика и механика. − 1980. − Т.44. Вып. 3. − С.395-402.
7. Шатина А.В. Эволюция движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил // Космические исследования. − 2001. − Т. 39, №3. − С. 303-315.
8. Вильке В.Г., Шатина А.В., Шатина Л.С. Эволюция движения двух вязкоупругих планет в поле сил взаимного притяжения // Космические исследования. − 2011. − Т. 49, №4. − С. 355-362.
9. Лейбензон Л.С. Краткий курс теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1942. − 304 с.
10. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. − 304 с.
11. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. − 800 с.
12. Krasinsky G.A., Brumberg V.A. Secular increase of astronomical unit from analysis of the major planet motions, and its interpretation // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. −2004.− V 90. − P 267-288.
13. Куликовский П.Г. Справочник любителя астрономии. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. − 704 с.