

УДК 530.145

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МАЙОРАНЫ В ПОСТОЯННОМ ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Гитман Д. М., д. ф.-м. н., E-mail: gitman@if.usp.br, Университет Сан-Паулу, Сан-Паулу, Бразилия.

Петрусевич Д.А. E-mail: petrdenis@mail.ru

Шелепин А.Л., д. ф.-м. н., E-mail: alex@shelepin.msk.ru
МГТУ МИРЭА, Москва, Россия

Аннотация В работе строятся точные решения релятивистских волновых уравнений в постоянном магнитном поле в пространстве 2+1 измерений. Рассматриваются как конечнокомпонентные уравнения, так и бесконечнокомпонентные уравнения Майорана. Последние могут служить для описания как обычных частиц, так и частиц с дробным спином (анионов).

Ключевые слова Точные решения релятивистских волновых уравнений; теоретико-групповые методы в физике; уравнение Майораны

EXACT SOLUTIONS OF MAJORANA EQUATION IN A CONSTANT AND UNIFORM MAGNETIC FIELD

Gitman D., Dr. of Sci., E-mail: gitman@if.usp.br, University of Sao Paulo, Sao Paulo, Brazil.

Petrusevich D. E-mail: petrdenis@mail.ru

Shelepin A., Dr. of Sci., E-mail: alex@shelepin.msk.ru
MSTU MIREA, Moscow, Russia

Abstract We get exact solutions of relativistic wave equations in a constant and uniform magnetic field in 2+1 dimensions. We consider both finite-component and Majorana equations (infinite-component equations of the first order). Majorana equations may describe particles with any real value of the spin, and are used in relativistic anyon theory.

Keywords: exact solutions of relativistic wave equations, group-theoretical methods in physics, Majorana equation.

Бесконечнокомпонентные волновые уравнения, связанные с унитарными представлениями группы Лоренца, были впервые рассмотрены Этторе Майорана (см. [12]), и переоткрыты позднее Гельфандом и Ягломом (см. [5]). С одной стороны, уравнения Майорана, в отличие от уравнения Дирака, имеют пространственноподобные решения с положительным спектром энергии, с другой они описывают спектр спинов и масс. Сравнительно недавний обзор (см. [4]) дает хорошее представление об истории уравнений Майорана, их современном статусе и широком круге вопросов, связанных с ними.

В пространстве 2+1 измерений уравнения, аналогичные уравнениям Майорана в 3+1-мерном пространстве, связаны с бесконечномерными унитарными неприводимыми представлениями (НП) группы Лоренца $SO(2,1) \sim SU(1,1)$. Эти уравнения описывают

частицы с произвольным действительным спином и используются в релятивистской теории анионов (см. [4, 7, 13]).

Нахождение точных решений релятивистских волновых уравнений для произвольных спинов во внешнем поле представляет собой важную задачу, причем такие решения известны в основном только для уравнений Клейна-Гордона и Дирака (см. [1]). Для уравнений Майорана можно найти свободные решения, однако нахождение точных решений во внешнем электромагнитном поле представляет собой сложную задачу ввиду бесконечного числа компонент.

В настоящей работе мы строим точные решения уравнений Майорана в постоянном однородном магнитном поле. Кроме того, мы сравниваем их с решениями конечнокомпонентных уравнений, описывающих частицы с целым или полуцелым спином, в частности, с решениями уравнения Дирака.

Ниже мы применяем подход, основанный на использовании функций $f(x, z)$ на группе Пуанкаре, зависящих от положения и ориентации, развиваемый нами в работах (см. [8, 9, 10]). Описание релятивистских частиц со спином в терминах скалярного поля, зависящего, кроме координат x^μ , также от некоторых дополнительных непрерывных переменных, имеет долгую историю (см. [8]). Отметим лишь, что такие поля были введены независимо рядом авторов в конце 40-х - начале 50-х годов (см. [2, 6, 14, 15]).

2+1-мерная группа Пуанкаре $M(2,1)$ представляет собой полупрямое произведение группы трансляций и $SO(2,1) \sim SU(1,1)$. Соответственно, функции на группе зависят от 3 параметров x^μ , задающих пространственные координаты, и трех параметров группы, задающих ориентацию. Вместо трех действительных параметров (аналогов углов Эйлера) удобно использовать комплексные параметры - элементы первого столбца $z^1, z^2, |z^1|^2 - |z^2|^2 = 1$, матрицы $SU(1,1)$ (т.е. аналоги параметров Кэли-Клейна компактной группы $SU(2)$).

Как известно, представление в пространстве функций на группе (обобщенное регулярное представление) содержит все (с точностью до эквивалентности) НП группы. Соответственно, в разложении этого представления на неприводимые содержатся поля, отвечающие произвольным спинам. Ниже мы будем рассматривать собственные функции оператора Казимира группы Лоренца $\hat{\mathbf{S}}^2 = \hat{S}_\mu \hat{S}^\mu$ и оператора проекции \hat{S}^0 ,

$$\hat{\mathbf{S}}^2 |SS_0\rangle = S(S+1) |SS_0\rangle, \quad (1)$$

$$\hat{S}^0 |SS_0\rangle = S_0 |SS_0\rangle, \quad (2)$$

которые образуют базис НП группы Лоренца. Функции

$$f(x, z) = \sum_{S_0} \psi_{SS_0}(x) |SS_0\rangle \tag{3}$$

удовлетворяют уравнению

$$\hat{\mathbf{S}}^2 f(x, z) = S(S+1)f(x, z). \tag{4}$$

Группа Лоренца имеет два типа представлений, которые могут быть использованы для описания частиц. Во-первых, это неунитарные НП размерности $2S+1$ (серия T_S^0), $2S \geq 0$, целое. В этом случае $f(x, z)$ - полином степени $2S$ от z_1, z_2 ,

$$|SS_0\rangle = \left[\frac{(2S)!}{(S+S_0)!(S-S_0)!} \right]^{1/2} z_1^{S+S_0} z_2^{S-S_0}, \tag{5}$$

$$S^0 = -S, -S+1, \dots, S-1, S.$$

Во-вторых, это бесконечномерные унитарные НП дискретных положительной T_S^+ и отрицательной T_S^- . В этом случае $f(x, z)$ - квазиполином отрицательной степени $2S$ (подробнее см. [7]).

Для НП $T_S^+(g)$ проекция $S^0 = |S|, |S|+1, |S|+2, \dots$, а для НП $T_S^-(g)$ проекция $S^0 = -|S|, -|S|-1, -|S|-2, \dots$,

$$T_S^+ : |SS_0\rangle = \left(\frac{\Gamma(-n_2)}{\Gamma(-2S)n_1!} \right)^{1/2} (-i)^{n_1} z_1^{n_1} z_2^{n_2}, \tag{6}$$

$$n_1 \geq 0, \text{ целое}, n_2 < 0,$$

$$T_S^- : |SS_0\rangle = \left(\frac{\Gamma(-n_1)}{\Gamma(-2S)n_1!} \right)^{1/2} (-i)^{n_1} z_1^{n_1} z_2^{n_2}, \tag{7}$$

$$n_1 < 0, n_2 \geq 0, \text{ целое},$$

где $n_1 = S + S_0, n_2 = S - S_0$. Генераторы группы $SU(1,1)$,

$$\hat{S}^0 = \frac{1}{2} \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right),$$

$$\hat{S}^1 = \frac{1}{2} \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} \right),$$

$$\hat{S}^2 = -\frac{i}{2} \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} \right).$$

Неэквивалентные НП 2+1-мерной группы Пуанкаре группы $M(2,1)$ ненулевой массы задаются массой m , спином s и знаком энергии $\text{sgn} p_0$ (см. [3, 7]). Свободные частицы характеризуются собственными значениями двух операторов Казимира группы $M(2,1)$,

$$\hat{p}^2 f(x, z) = m^2 f(x, z), \quad (8)$$

$$\hat{p}_\mu \hat{S}^\mu f(x, z) = k f(x, z), \quad (9)$$

где \hat{p}_μ и \hat{S}^μ - операторы импульса и спина.

Для частицы ненулевой массы спин задается НП малой группы $SO(2)$, т.е. действительным числом со знаком. В системе покоя

$$k = mS^0 \operatorname{sgn} p_0 \quad (10)$$

и спин можно определить как собственное значение оператора Казимира $\hat{p}_\mu \hat{S}^\mu$, деленное на $m \operatorname{sgn} p_0$.

Частицы с целым или полуцелым спином могут быть описаны как конечномерными НП группы Лоренца, так и бесконечномерными ее представлениями серий T^+ и T^- (и соответственно конечнокомпонентными и бесконечнокомпонентными уравнениями типа Майораны), с дробным - только бесконечномерными представлениями (см. [7] и цитируемые там работы).

В случае постоянного магнитного поля возможность нахождения точного решения задачи как для конечномерных, так и бесконечномерных представлений группы Лоренца связана с записью дифференциального оператора в алгебраической форме через генераторы групп Гейзенберга и $SU(1,1)$. При описании спина мы, следуя [7], вместо многокомпонентных (а в случае уравнений типа Майораны и бесконечнокомпонентных) функций от координат x^μ , $\mu = 0, 1, 2$, используем волновые функции, зависящие кроме x^μ , от спинора z_α , $\alpha = 1, 2$, задающего ориентацию.

Рассмотрим частицу, описываемую уравнением (9), во внешнем электромагнитном поле:

$$\hat{L}f(x, z) = kf(x, z), \quad \hat{L} = (\hat{p}_\mu - eA_\mu)\hat{S}^\mu, \quad (11)$$

$$k = \pm mS.$$

В пространстве 2+1 измерений магнитное поле имеет одну компоненту

$$B_0(x) = \varepsilon_{012} F^{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}.$$

В постоянном магнитном поле, выбирая потенциалы $A_\mu = (0, 0, Bx^1)$, и восстанавливая c в формулах, получим:

$$\hat{L} = p_0 \hat{S}^0 + c \hat{p}_1 \hat{S}^1 + c(p_2 - x^1 B e / c) \hat{S}^2 =$$

$$p_0 \hat{S}^0 - \sqrt{|eB|} c \left(i \hat{S}^1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \operatorname{sgn}(e) \hat{S}^2 \xi \right), \quad (12)$$

где

$$\xi = \sqrt{\frac{|eB|}{c}} \left(x^1 - p_2 \frac{c}{|eB|} \right). \quad (13)$$

Операторы \hat{p}_0 и \hat{p}_2 коммутируют с \hat{L} , их собственные функции имеют вид:

$$f_{p_0 p_2}(x, z) = e^{-i(p_0 x^0 - p_2 x^2)} \Phi(x^1, z). \quad (14)$$

Далее будем искать решения вида (14).

Введем в рассмотрение операторы рождения и уничтожения, а также повышающие и понижающие операторы,

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right), \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right), \\ \hat{S}_- &= \hat{S}^1 - i\hat{S}^2 = z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}, \\ \hat{S}_+ &= \hat{S}^1 + i\hat{S}^2 = z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}, \end{aligned} \quad (15)$$

и выразим \hat{L} через них,

$$\begin{aligned} \hat{L} &= p_0 \hat{S}^0 + \frac{\kappa}{2} [(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)(\hat{S}_+ + \hat{S}_-) \\ &\quad - \text{sgn}(e)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{S}_+ - \hat{S}_-)], \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\kappa = \sqrt{\frac{|eB| c \hbar}{2}}. \quad (17)$$

В частности при $\text{sgn}(e) = -1$ имеем

$$\hat{L} = p_0 \hat{S}^0 + \kappa (\hat{a} \hat{S}_+ - \hat{a}^\dagger \hat{S}_-). \quad (18)$$

Рассмотрим состояния $|nSS_0\rangle$, собственные для операторов $\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{S}^0, \hat{\mathbf{S}}^2$ с собственными значениями $n, S_0, S(S+1)$,

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger \hat{a} |nSS_0\rangle &= n |nSS_0\rangle, \\ \hat{S}^0 |nSS_0\rangle &= S_0 |nSS_0\rangle, \\ \hat{\mathbf{S}}^2 |nSS_0\rangle &= S(S+1) |nSS_0\rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

Операторы $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ и \hat{S}^0 не коммутируют с \hat{L} , и решение уравнения (14) мы будем искать в виде линейных комбинаций состояний $|nSS_0\rangle$ с различными n и S_0 ,

$$\begin{aligned}
 \Phi(x^1, z) &= \sum_{n, S_0} C_{nS_0} |nSS_0\rangle = \\
 &= \sum_{n, S_0} C_{nS_0} \Psi_n(\xi) \Psi_{SS_0}(z), \\
 \Psi_n(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \\
 H_n(\xi) &= (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n}, \\
 \hat{a} \Psi_n &= \sqrt{n} \Psi_{n-1}, \\
 \hat{a}^+ \Psi_n &= \sqrt{n+1} \Psi_{n+1}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

С этой целью мы рассмотрим инвариантные подпространства оператора \hat{L} в терминах состояний $|nSS_0\rangle$.

Собственные значения оператора \hat{S}^2 задают НП группы $SU(1,1)$. Для функций $\Psi_{SS_0}(z)$ имеем 2 различных случая, отвечающих конечномерным неунитарным НП группы $SU(1,1)$, $-S \leq S_0 \leq S$, (см. (5)) и бесконечномерным унитарным НП дискретных серий $T^+, S^0 \geq S$ и $T^-, S^0 \leq -S$, см. (6), (7).

Рассмотрим сначала первый случай. Для конечномерных неунитарных НП группы $SU(1,1)$

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_- |S, S_0\rangle &= \sqrt{(S+S_0)(S-S_0+1)} |S, S_0-1\rangle, \\
 \hat{S}_+ |S, S_0\rangle &= \sqrt{(S+S_0+1)(S-S_0)} |S, S_0+1\rangle,
 \end{aligned} \tag{21}$$

оператор \hat{S}^0 эрмитов, \hat{S}^1 и \hat{S}^2 антиэрмитовы, соответственно $\hat{S}_-^\dagger = -\hat{S}_+$.

Оператор \hat{L} (18) при знаке заряда $\text{sgn}(e) = -1$ состоит из трёх слагаемых. Для первого из них, $\hat{p}_0 \hat{S}^0$, состояния $|nSS_0\rangle$ являются собственными. Второе, пропорциональное $\hat{a} \hat{S}_+$, переводит состояние $|nSS_0\rangle$ в $|n-1, S, S_0+1\rangle$, а третье, пропорциональное $\hat{a}^+ \hat{S}_-$, - в $|n+1, S, S_0-1\rangle$ (см. рис. 1, рис. 2),

$$\begin{aligned}
 \hat{L} |nSS_0\rangle &= p_0 S_0 |nSS_0\rangle \\
 &+ \kappa \sqrt{n(S+S_0+1)(S-S_0)} |n-1, S, S_0+1\rangle \\
 &- \kappa \sqrt{(n+1)(S+S_0)(S-S_0+1)} |n+1, S, S_0-1\rangle,
 \end{aligned} \tag{22}$$

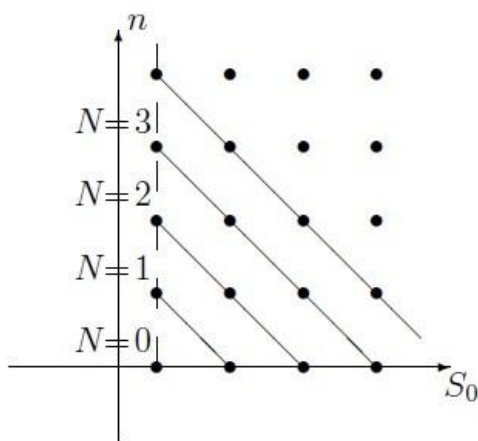


Рис. 1. Состояния $|nSS_0\rangle$, входящие в разложение волновой функции, отвечающей N -му уровню, для бесконечномерных унитарных неприводимых представлений $T_s^+, S = -s = -1/2$ группы $SU(1,1)$.

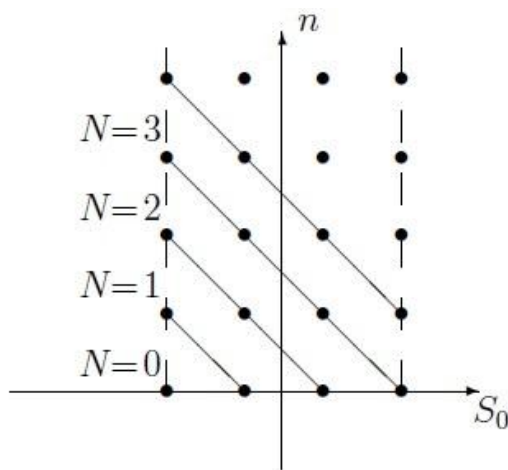


Рис. 2. Состояния $|nSS_0\rangle$, входящие в разложение волновой функции, отвечающей N -му уровню, для конечномерных неприводимых представлений $T_s^0, S = -s = -3/2$, группы $SU(1,1)$.

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{S}_+ |0SS_0\rangle &= 0, & \hat{a}\hat{S}_+ |nSS\rangle &= 0, \\ \hat{a}^\dagger\hat{S}_- |n, S, -S\rangle &= 0. \end{aligned}$$

В соответствии со сказанным выше, состояние $|0, S, -S\rangle$ является собственным для оператора \hat{L} при $\text{sgn}(e) = -1$ (при $\text{sgn}(e) = +1$ собственным является состояние $|0, S, S\rangle$). Это состояние отвечает нижнему (нулевому) уровню энергии $p_0 = mc^2$,

Следующий уровень энергии отвечает линейной комбинации состояний $|1, S, -S\rangle$ и $|0, S, -S+1\rangle$,

$$\Phi_N(x^1, z) = \sum_{K=0}^{\min(N, 2S)} c_K |N-K, S, -S+K\rangle, \tag{23}$$

(см. рис. 2). В общем случае собственными функциями оператора \hat{L} , отвечающими N -му уровню энергии, согласно (22), является линейная комбинация

$$\begin{aligned} \hat{L}|N-K, S, -S+K\rangle = & \\ p_0(-S+K)|N-K, S, -S+K\rangle + & \\ \kappa\sqrt{(N-K)(K+1)K'}|N-K-1, S, -S+K+1\rangle - & \quad (24) \\ \kappa\sqrt{(N-K+1)(K'+1)K}|N-K+1, S, -S+K-1\rangle, & \\ K' = 2S - K. & \end{aligned}$$

Составим столбец из функций, входящих в разложение (23) $\tilde{\Phi}_N = (|N, S, -S\rangle, \dots, |0, S, -S+N\rangle)^T$, где $2S \geq N$, имеющий N компонент, или $\tilde{\Phi}_N = (|N, S, -S\rangle, \dots, |N-S, S, S\rangle)^T$, где $2S \leq N$, имеющий $2S$ компонент. Действие оператора $\hat{L} - ms$ теперь может быть записано в матричной форме,

$$\tilde{\Phi}_N = \begin{pmatrix} |N, S, -S\rangle \\ \dots \\ |0, S, -S+N\rangle \end{pmatrix}, \quad S \geq N, \quad (25)$$

или

$$\tilde{\Phi}_N = \begin{pmatrix} |N, S, -S\rangle \\ \dots \\ |N-S, S, S\rangle \end{pmatrix}, \quad S \leq N. \quad (26)$$

Ниже мы положим $\kappa = -mS$ в (11). Действие оператора $\hat{L} + mc^2S$ теперь может быть записано в матричной форме,

$$(\hat{L} + mc^2S)\tilde{\Phi}_N = A\tilde{\Phi}_N, \quad (27)$$

Матрица A является трехдиагональной,

$$\begin{pmatrix} (-p_0 + mc^2)S & \kappa\sqrt{2SN} & 0 & \dots & 0 \\ -\kappa\sqrt{2SN} & (-p_0 + mc^2)S + p_0 & \kappa\sqrt{2(2S-1)(N-1)} & \dots & 0 \\ 0 & -\kappa\sqrt{2(2S-1)(N-1)} & (-p_0 + mc^2)S + 2p_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa\sqrt{N(2S-N)} & (-p_0 + mc^2)S + Np_0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где последняя строка выписана для $N \leq 2S$ (в этом случае A - это $(N+1) \times (N+1)$ матрица, а в случае $N \geq 2S$ A - это $(2S+1) \times (2S+1)$ матрица).

Спектр энергии p_0 дается решениями уравнения $\det A = 0$ - алгебраического уравнения степени $1 + \min(N, 2S)$.

В случае бесконечномерных НП группы $SU(1,1)$ дискретной положительной серии операторы \hat{S}^μ эрмитовы, $\hat{S}_-^\dagger = \hat{S}_+$,

$$\begin{aligned} \hat{S}_+ |SS_0\rangle &= -i\sqrt{(S_0 - S)(S + S_0 + 1)} |S, S_0 + 1\rangle, \\ \hat{S}_- |SS_0\rangle &= \sqrt{(S_0 - S + 1)S + S_0} |S, S_0 - 1\rangle. \end{aligned} \quad (29)$$

Заметим, что $\hat{a}\hat{S}_+ |OSS_0\rangle = 0$, $\hat{a}^+\hat{S}_- |nSS\rangle = 0$. Соответственно, сумма

$$\Phi_n(x^1, z) = \sum_{K=0}^N c_K |N - K, S, -S + K\rangle, \quad (30)$$

содержит $N + 1$ слагаемое (см. рис. 1).

Нижний энергетический уровень $p_0 = mc^2$ отвечает состоянию $|0, S, S\rangle$. Для действия \hat{L} на $|nSS_0\rangle$ получим

$$\begin{aligned} \hat{L} |nSS_0\rangle &= p_0 S_0 |nSS_0\rangle - \\ & i\kappa\sqrt{n(S + S_0 + 1)(-S + S_0)} |n - 1, S, S_0 + 1\rangle + \\ & i\kappa\sqrt{(n + 1)(S + S_0)(-S + S_0 + 1)} |n + 1, S, S_0 - 1\rangle, \end{aligned} \quad (31)$$

где \hat{L} дается (17). Формула (31) может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned} \hat{L} |N - K, S, -S + K\rangle &= \\ & p_0(-S + K) |N - K, S, -S + K\rangle - \\ & i\kappa\sqrt{(N - K)(K + 1)K'} |N - K - 1, S, -S + K + 1\rangle + \\ & i\kappa\sqrt{(N - K + 1)(K' + 1)K} |N - K + 1, S, -S + K - 1\rangle, \\ & K' = -2S + K. \end{aligned} \quad (32)$$

Трехдиагональная матрица A является эрмитовой,

$$A = \begin{pmatrix} (p_0 - m)|S| & i\kappa\sqrt{(-2S)N} & 0 & \dots & 0 \\ -i\kappa\sqrt{(-2S)N} & (p_0 - m)|S| + p_0 & i\kappa\sqrt{2(1 - 2S)(N - 1)} & \dots & 0 \\ 0 & -i\kappa\sqrt{2(1 - 2S)(N - 1)} & (p_0 - m)|S| + 2p_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -i\kappa\sqrt{N(-2S - N)} & (p_0 - m)|S| + Np_0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Всего при данном N имеется $N + 1$ решение, что связано с тем, что уравнение Майораны описывает спектр спинов и масс, $m_k s_k = ms$, где $s_k = s, s + 1, \dots$ (Отметим, уравнения, связанные с конечномерными представлениями группы Лоренца T_S^0 , также описывают спектр спинов и масс, $m_k s_k = ms$, где $s_k = -s, -s + 1, \dots, s$.)

Рассмотрим сначала решения уравнения в случае конечномерных представлений. Для первого уровня ($N = 1$) при $S \neq 1$ имеем квадратное уравнение

$$p_0^2(S - 1) + p_0 mc^2(2S - 1) + m^2 c^4 S + 2\kappa^2 = 0, \quad (34)$$

$$p_0 = \frac{mc^2}{2(S-1)} \left(2S-1 \pm \sqrt{1+8(\kappa^2/m^2c^4)(1-S)} \right). \quad (35)$$

Условие положительности дискриминанта дает $4(S-1) \frac{2\kappa^2}{m^2c^4} < 1$, или

$$4(S-1) \frac{2\kappa^2}{m^2c^4} = 4(S-1) \frac{\Omega\hbar}{mc^2} < 1, \quad (36)$$

$$\Omega = \frac{|eB|}{mc}.$$

При $S=1/2$ дискриминант положителен при любом значении напряженности магнитного поля B , при $S=1$ уравнение является линейным, а для $S>1$ при достаточно больших B дискриминант становится отрицательным, что приводит к появлению комплексных значений p_0 . Однако, необходимо отметить, что согласно (36) такие комплексные значения p_0 возникают, только когда расстояние между уровнями, задаваемое $\Omega\hbar$, близко к энергии покоя mc^2 , т.е. в случае, когда исходное уравнение и его одночастичная интерпретация становятся неприменимыми. Для $\Omega\hbar/mc^2 \ll 1$ имеем $p_0 \approx mc^2 + \Omega\hbar + (S-1)\Omega^2\hbar^2/mc^2$.

Для бесконечномерных унитарных представлений при $N=1$ получим квадратное уравнение

$$p_0^2(|S|+1) - p_0 mc^2(2|S|+1) + m^2c^4|S| - 2\kappa^2 = 0, \quad (37)$$

отличающееся от (34) знаком перед κ^2 , с положительным дискриминантом $m^2c^4 + 8(|S|+1)\kappa^2$. В отличие от предыдущего случая, для бесконечномерных унитарных НП действительные корни существуют при любых N в силу эрмитовости оператора $\hat{p}_\mu \hat{S}^\mu$. Для решения уравнения (37), отвечающего знаку + перед квадратным корнем, получим

$$p_0 = \frac{mc^2}{2(|S|+1)} (1+2|S| + (1+8(|S|+1)\kappa^2/m^2c^4)^{1/2})$$

$$\approx mc^2(1+2\kappa^2/m^2c^4 - 4(|S|+1)\kappa^4/m^4c^8) \quad (38)$$

$$= mc^2 + \Omega\hbar - (|S|+1)(\Omega\hbar)^2/mc^2.$$

Мы выбрали знак + перед корнем, т.к. именно это решение при обращаемся в ноль поле $B=0$ переходит в решение, отвечающее спину $s=|S|$ и массе m (другое решение отвечает спину $s=|S|-1$ и массе $m|S|/(|S|-1)$).

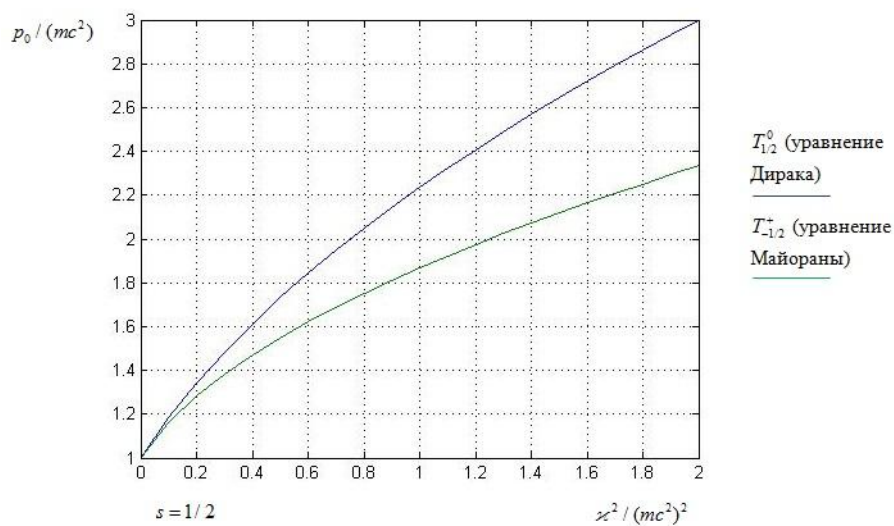


Рис. 3. Зависимость энергии первого уровня $p_0 / (mc^2)$ от $\kappa^2 / (mc^2)^2$ при спине $s = 1/2$

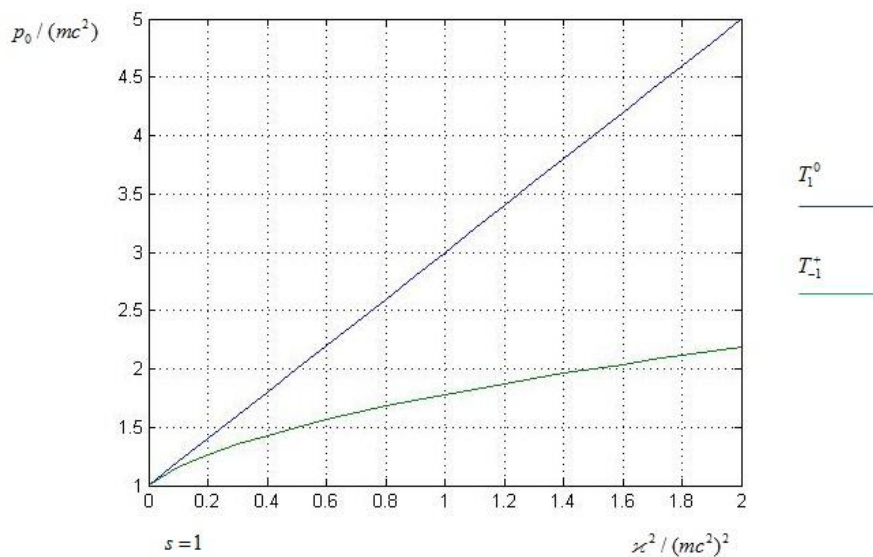


Рис. 4. Зависимость энергии первого уровня $p_0 / (mc^2)$ от $\kappa^2 / (mc^2)^2$ при спине $s = 1$

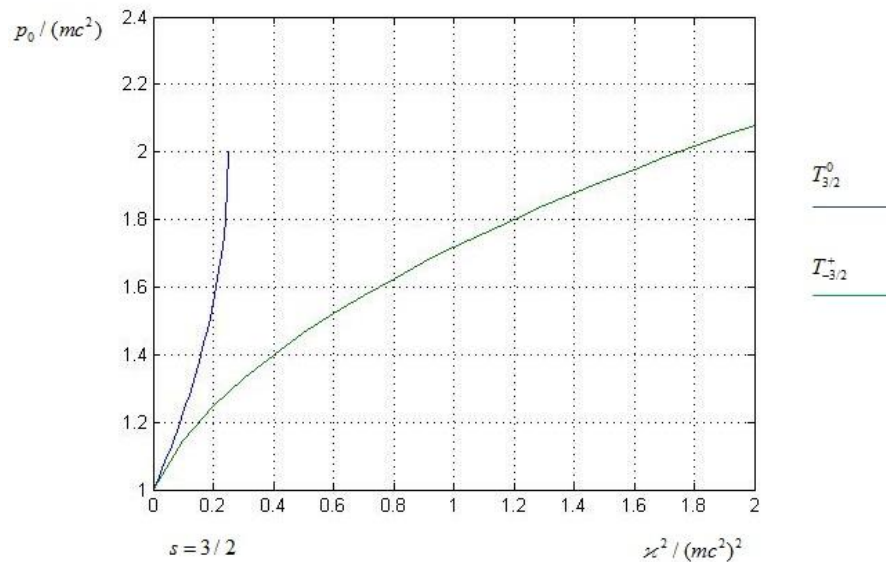


Рис. 5. Зависимость энергии первого уровня $p_0 / (mc^2)$ от $\kappa^2 / (mc^2)^2$ при спине $s = 3/2$

Графики зависимости энергии первого уровня p_0 / mc^2 в зависимости от безразмерного параметра $\kappa^2 / (mc^2)^2$ приведены на рисунках 3, 4, 5 для значений $s = 1/2, 1, 3/2$. Решения для уравнений типа Майораны качественно ведут себя одинаково при любых спинах, и соответствующие кривые сходны с кривой дираковской частицы. Для конечномерных уравнений, описывающих спины $|s| > 1$, кривые ведут себя иначе – скорость их роста увеличивается с увеличением поля, а в точке, где кривая заканчивается, решения становятся комплексными.

Рассмотрим подробнее случай произвольного N .

Для $s = \pm 1/2$ (уравнение Дирака) имеем

$$p_0^2 = m^2 c^4 + 4N\kappa^2. \tag{39}$$

В случае $s = 1$ (описываемого аналогом уравнения Даффина-Кеммера) уравнение для p_0 остаётся квадратным:

$$p_0^2 mc^2 + 2p_0 \kappa^2 - mc^2 (m^2 c^4 + 2\kappa^2 (2N - 1)) = 0. \tag{40}$$

Дискриминант положителен, и корни p_0 действительны при любых значениях B ,

$$p_0 = \frac{-\kappa^2}{mc^2} + \frac{\sqrt{(\kappa^2 + m^2 c^4)^2 + 4\kappa^2 m^2 c^4 (N - 1)}}{mc^2} \tag{41}$$

$$\approx mc^2 + N\Omega - \frac{\Omega^2 (N - 1)}{2mc^2}.$$

Мы выбираем знак + перед корнем, т.к. именно это решение при обращении в ноль поле $B = 0$ переходит в решение, отвечающее спину s и массе m .

Теперь сравним описание частицы спина $1/2$ в магнитном поле с помощью уравнений Дирака и Майораны.

В первом случае спектр даётся формулой (39), и соответственно для малых κ / mc^2 имеем:

$$\begin{aligned} \pm p_0 &= mc^2(1 + 4N\kappa^2 / m^2)^{1/2} \approx \\ &mc^2(1 + 2N\kappa^2 / m^2c^4 - 2N^2\kappa^4 / m^4c^8) \\ &= mc^2 + N\Omega - N^2\Omega^2 / 2mc^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Для нахождения N -го уровня энергии надо вычислить определитель матрицы (28), что приведёт нас к алгебраическому уравнению порядка $N+1$ на p_0 . Приблизительно найдём его наименьший корень (т.е. корень p_0 , наиболее близкий к mc^2). Вычислим определитель с точностью до членов более высокого порядка по κ^2 / m^2 при $\kappa / mc^2 \ll 1$, записывая p_0 в виде ряда:

$$p_0 = mc^2(1 + \sum_k a_k (\kappa / mc^2)^{2k}). \quad (43)$$

Для подсчёта определителя (33), мы воспользуемся рекуррентной формулой:

$$\begin{aligned} D_k &= [(p_0 - mc^2) |S| + (k-1)p_0] D_{k-1} \\ &- \kappa^2 k(2|S| + k-1)(N-k+1) D_{k-2} = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

где D_k - главный минор k -го порядка матрицы A . Заметим, что согласно (44), если в разложении определителей D_i , $i = k-2, k-1$ по степеням κ содержатся только члены порядка $2i$ и выше, то в разложении D_k - только члены порядка $2(k-1)$ и выше. Т.о., последовательно приравнивая определители D_k к нулю с точностью до членов порядка $2k$, мы можем найти коэффициенты a_k в (43). В частности, используя представление (43) для вычисления D_3 , получим с точностью до членов 4-го порядка по κ :

$$\begin{aligned} p_0 &\approx mc^2(1 + 2N\kappa^2 / m^2c^4 - \\ &(2N^2 + 4N)\kappa^4 / m^4c^8) \\ &= mc^2 + N\Omega - (N^2 + 2N)\Omega^2 / 2mc^2. \end{aligned} \quad (45)$$

Сравнивая спектры (42) и (45), заключаем, что разница $N\Omega^2 / mc^2$ проявляется в третьем члене разложения, т.е. в ультрарелятивистском режиме $\hbar\Omega / mc^2 \approx 1$, что соответствует $B \approx \frac{m^2c^3}{|e|\hbar} \approx 10^{13}$ Гс.

Т.о., уравнения Дирака и Майораны дают различный спектр для заряженной массивной частицы спина $1/2$ в магнитном поле. Однако, эти спектры совпадают в нерелятивистском пределе $\kappa / mc^2 \rightarrow 0$.

При максимально достижимом магнитном поле в современных условиях 10^6 Гс, имеем:

$$\Delta E_N / (E_N^D - E_{N-1}^D) \approx 10^{-7},$$

где $\Delta E_N = E_N^M - E_N^D$ - разница между уровнями энергии Майораны E_N^M и Дирака E_N^D .

Для полноты приведём здесь выражения для энергии N - го уровня частицы спина s с точностью до членов 4-го порядка по κ . Как и выше, вычисляя определитель D_3 , получим в случае конечномерных представлений и бесконечномерных НП серии T^+ , соответственно

$$\begin{aligned} p_0 &\approx mc^2(1 + 2N\kappa^2 / m^2c^4 - \\ &2N(N - 2s + 1)\kappa^4 / m^4c^8) = \\ &mc^2 + N\Omega - N(N - 2s + 1)\Omega^2 / 2mc^2, \end{aligned} \quad (46)$$

и

$$\begin{aligned} p_0 &\approx mc^2(1 + 2N\kappa^2 / m^2c^4 - \\ &2N(N + 2|s| + 1)\kappa^4 / m^4c^8) = \\ &mc^2 + N\Omega - N(N + 2|s| + 1)\Omega^2 / 2mc^2. \end{aligned} \quad (47)$$

В дальнейшем представляет интерес сравнение решений, даваемых для спинов $1/2$ и 1 конечно- и бесконечнокомпонентными уравнениями для случая других внешних полей.

Разработанная в настоящей работе методика нахождения решений РВУ, основанная на связанной с симметрией задачи возможностью записи РВУ в терминах генераторов групп, может быть перенесена на $3+1$ -мерный случай. В $2+1$ измерениях операторы, входящие в линейные по p_μ уравнения являются генераторами группы Лоренца $SO(2,1) \sim SU(1,1)$, а сами уравнения для свободных частиц – это уравнения на собственные значения для оператора Казимира группы Пуанкаре $M(2,1)$. В $3+1$ измерениях линейные по p_μ уравнения Любаньского-Бхабба (в том числе уравнения Дирака и Даффина-Кеммера) и Майораны, в отличие от случая $2+1$ измерения, не связаны с операторами Казимира группы Пуанкаре. Операторы $\hat{\Gamma}^\mu$, входящие в уравнения, не являются генераторами группы Лоренца $SO(3,1)$. Однако, операторы Γ^μ

являются генераторами группы $SO(3,2)$, и мы также можем записать гамильтониан через генераторы.

Список литературы

1. Bagrov V.G., Gitman D.M. Exact Solutions of Relativistic Wave Equations / Dordrecht, Kluwer Acad. Pub., 1990.
2. Bargmann V., Wigner E.P. Group theoretical discussion of relativistic wave equations // Proc. Nat. Acad. 1948. Vol. 34. P. 211-223.
3. Binengar B. Relativistic field theories in three dimensions // J. Math. Phys. 1982. Vol 23(8). P. 1511 – 1517.
4. Casalbuoni R. Majorana and the infinite component wave equations // PoS, EMC. 2006. Vol.4. arXiv:hep-th/0610252.
5. Гельфанд И.М., Яглом А.М. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1948. Vol. 18. P. 703-733.
6. Гинзбург В.Л., Тамм И.Е. К теории спина. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1947. Vol. 17. P. 227-237.
7. Gitman D.M., Shelepin A.L. Poincaré group and relativistic wave equations in 2+1 dimensions // J. Phys. A. 1997. Vol. 30. P. 6093-6121.
8. Gitman D.M., Shelepin A.L. Fields on the Poincaré group and quantum description of orientable objects // Eur. Phys. J. C. 2009. Vol. 61, №1. P. 111-139. arXiv:hep-th/0901.2537.
9. Gitman D.M., Shelepin A.L. Classification of quantum relativistic orientable objects // Phys. Scr. 2011. 83:015103 (14pp). arXiv:1001.5290.
10. Gitman D.M., Shelepin A.L. Interaction of orientable object fields with gauge fields // Phys. Scr. 2011. 84:055101 (13pp).
11. Jackiw R., Nair V.P. Relativistic wave equation for anyons // Phys. Rev. D. 1991. Vol 43, № 6. P.1933-1942.
12. E. Majorana. Teoria relativistica di particelle con momento intrinseco arbitrario. // Nuovo Cimento. 1932. Vol. 9. P. 335-344.
13. Plyushchay M.S. The model of a relativistic particle with torsion // Nucl. Phys. B., 1991. Vol. 362, №28. – P.54-72.
14. Широков Ю.М. Релятивистская теория спина // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1951. Vol. 21, №6. – P. 748-760.
15. Yukawa H. Quantum theory of non-local fields. I. Free fields // Phys. Rev. 1950. Vol. 77, №2. – P. 219-226.