

УДК 004.9

ФИЛОСОФИЯ СЕТЕЙ ПЕТРИ

Кулагин В.П., д.т.н., профессор, МИЭМ НИУ ВШЭ, E-mail: kvp@miem.edu.ru

Цветков В.Я., д.т.н., профессор, МГТУ МИРЭА, E-mail: cvj2@mail.ru

Москва, Россия.

Аннотация. Статья анализирует методы исследования сложных систем. Предлагается общий подход проектирования сложных систем на основе использования теории тензорного анализа. Показана целесообразность перехода от непрерывного пространства к дискретному. Показана необходимость перехода к новой геометрии, отличающейся от аналитической или проективной. Вводится понятие структуры сети Петри или СП-структуры. Вводится понятие эталонной модели СП-структур. Вводится понятие преобразования системы координат СП-структур. Вводится понятие инварианта при тензорном анализе СП-структур. Дана общая модель использования тензорных методов и ее детализация при исследовании СП-структур.

Ключевые слова. пространство, сложность, сложные системы, геометрия, дискретное пространство, не эвклидова геометрия, разрывность пространства, инварианты, сети Петри, тензорная геометрия, тензорное вычисление, структуры сетей Петри, информационные конструкции, эквивалентность СП структуры.

PHILOSOPHY OF PETRI NETS

Kulagin V.P., D.Sc.(Tech), Prof., MIEM of HSE, E-mail: kvp@miem.edu.ru

Tsvetkov V.Y., D.Sc.(Tech), Prof., MSTU MIREA, E-mail: cvj2@mail.ru

Moscow, Russia

Abstract. Article analyzes the methods of study of complex systems. A general approach to the design of complex systems based on the use of the theory of tensor analysis. The expediency of transition from continuous to discrete space. The necessity of the transition to the new geometry that is different from the analytic or projective. We introduce the notion of Petri net structure or NP-structure. Introduces the concept of the reference model NP-structures. We introduce the concept of coordinate transformation NP structures. We introduce the notion of the invariant under tensor analysis of NP-structures. A general model of the use of tensor methods and detailing the study of superconducting structures

Keywords. Space, complexity, complex systems, geometry, discrete space, not Euclidean geometry, discontinuity of space, the invariants of Petri nets, the tensor geometry, tensor calculation, the structure of Petri nets, nformation construction, the equivalence of the NP structure.

Введение. Исследование, расчет и проектирование сложных систем давно является одной из основных проблем современной науки [1, 2]. Под сложными системами понимают производственные, технологические, информационно-вычислительные, технические, биологические системы. Многообразие объектов, которые называют сложными системами, столь велико, что трудно найти между ними что-то общее, кроме их сложности [3]. Накопленный опыт разработки таких систем показывает, что установилось мнение об индивидуальности каждой сложной системы, необходимости

разрабатывать специально для нее теорию, методы расчета и проектирования. Это снижает эффективность разработок, не позволяет использовать уже полученные результаты при разработке новых систем. Для того, чтобы получить единый подход к исследованию сложных систем любой структуры и различной природы, предназначена тензорная методология. Роль тензорных методов сформулирована в книге академика В.Г. Афанасьева "Общество: системность, познание, управление" [4]: "...Тензорный анализ позволяет отделить субъективное в изучении явления, связанное с позицией ученого, с выбором той или иной системы координат, от объективного, объективной реальности, которая не зависит от точки зрения, от системы координат".

Что такое тензор? Функции, которые при изменении системы координат преобразуются по линейному закону, Эйнштейн в 1916 году назвал тензорами. По существу именно тензорный подход позволил сформировать основы теории относительности [5]. Особенности тензорного подхода заключаются в следующем. Во-первых, если обобщенную систему координат рассматривать как тензор, а конкретные системы этого класса - как ее проекции в частных системах координат, то можно использовать главное для тензорного анализа, а именно: надо выбрать одну систему и использовать ее в качестве "эталонной" системы координат, а описания других систем приводить к описанию в терминах этого эталона, т.е. моделирование будет рассматриваться как описание исследуемой модели в заданной эталонной системе координат. Во-вторых, в качестве эталона желательно использовать такие системы, для которых разработаны тензорные методы расчета.

Тензорное исчисление возникло в математике для решения проблем, методологически аналогичных тем, которые решаются при анализе сложных систем. Понятие тензора связано с преобразованием систем координат и является, закономерным развитием представлений о пространстве. В данной статье рассматриваются вопросы применения тензорных методов при исследовании сложных систем, представляемых структурами сетей Петри (СП-структурами) [6].

1. Геометрическая интерпретация СП-структур

1.1. Типы геометрий. Известно, что каждая геометрия определяется группой преобразований, оставляющих инвариантными те или иные свойства геометрических фигур. Оказалось, что тензорному анализу сетей соответствует геометрия нового типа, не сводимая к известным геометриям [7, 8]. Например, *евклидова* геометрия допускает преобразования, не меняющие форму фигур. При этом можно переносить, вращать, изменять масштаб фигур. *Афинная* геометрия в дополнение к преобразованиям

геометрии Евклида допускает такие деформации фигур, при которых сохраняются условия прямолинейности и параллельности линий. Например, параллелограмм и квадрат в данной геометрии представляют одну и ту же геометрическую фигуру. В *проективной* геометрии в результате преобразований должно сохраняться условие прямолинейности. В *топологии* допустимы почти любые преобразования, но при этом должно сохраняться свойство принадлежности (точки, по-прежнему, должны принадлежать линиям, линии - поверхностям и т.д.).

Однако при преобразовании структур дискретного пространства, к которым относятся СП-структуры, где важную роль играют операции разрыва и соединения, свойство принадлежности уже не является инвариантом такой группы преобразования. Возникает необходимость рассмотреть новый тип геометрии. В связи с этим возникает два вопроса.

1. Что является инвариантом вновь рассматриваемой группы преобразований, т.е. что остается постоянным при операциях разделения и соединения структур дискретного пространства?

2. В чем заключаются особенности пространства структур по сравнению с уже известными пространствами? Попробуем ответить на эти вопросы применительно к пространству СП-структур.

1.2. Геометрия тензорного анализа СП-структур. Для того, чтобы определить геометрию тензорного анализа СП-структур необходимо определить такие понятия, как пространство, размерность, система координат, преобразование системы координат.

Понятия пространства СП-структур и его размерности введены в работе [6]. Рассмотрим понятия системы координат и преобразования системы координат. Для этого напомним некоторые определения и введем новые.

Обозначим через $pre(t)$ и $post(t)$ множества входных и выходных позиций перехода t , а через $pre(p)$ и $post(p)$ - множества входных и выходных переходов позиции p в сети Петри (СП). СП, в которой множество позиций $P = \{p', p''\}$, множество переходов $T = \{t\}$, $p' \in pre(t)$ и $p'' \in post(t)$, назовем *элементарной сетью*.

Примитивной системой N_{PR} назовем множество элементарных сетей заданной мощности.

СП-структуру, полученную из примитивной системы путем объединения наперед заданного множества вершин, будем называть *эталонной моделью* N .

Пусть система координат СП-структур определяется способом соединения элементарных сетей примитивной системы N_{PR} . При этом множество элементарных сетей, составляющих СП-структуру, можно рассматривать как некоторую обобщенную

сеть, а любое их соединение в произвольную структуру - как проекция обобщенной сети в частной системе координат.

Под *преобразованием системы координат* СП структур будем понимать переход от одного способа соединения элементарных сетей к другому. В процессе преобразования системы координат выполняются операции разрыва и соединения связей между переходами и позициями СП-структуры [9-12]. При этом количество элементарных сетей, составляющих СП-структуры, представленных в разных системах координат, должно быть одинаковым (постоянство размерности пространства).

Что целесообразно взять в качестве инварианта при тензорном анализе СП? Для этого необходимо определить, какая величина, характеризующая СП-структуру некоторой сложной системы, остается неизменной при переходе от одной системы координат к другой. Будем считать, что способ соединения структурных частей системы не изменяет их исходного состояния и состояния всей системы в целом. Так как исходное состояние системы моделируется в СП-структуре начальной разметкой [13], то сделаем предположение об инвариантности начальной разметки к способу соединения фрагментов СП-структуры.

Рассмотрим этапы использования тензорных методов при исследовании СП-структур.

- Рассмотреть физическую, геометрическую и структурную стороны процесса функционирования сложной системы. Получить уравнения, описывающие основные процессы, протекающие в ней.

- Построить СП-структуру, моделирующую работу системы.

- Привести полученные уравнения к тензорному виду. Для этого необходимо дать геометрическую трактовку задачи: ввести пространство, размерность, определить системы координат и способы их преобразования.

- Выбрать эталонную СП-структуру для моделирования сложной системы.

- Построить модель для тензорной формы уравнений рассматриваемой сложной системы.

- Провести анализ исследуемой сложной системы.

Анализ систем можно проводить двумя способами, которые не исключают друг друга. Если сложность СП-структуры не позволяет рассчитывать ее как единое целое, то можно применить аппарат диакоптики [14, 15] - структурировать СП-структуру путем ввода иерархических переходов [16], исследовать полученные компоненты отдельно, а затем объединить результаты анализа. Полученный результат интерпретируется в термины исходной системы.

1.3. Постулаты обобщений. В работах [15,17] было показано, что сложные системы не только описываются тем же количеством символов, что и простые системы, но и весь метод рассуждения, используемый в анализе их поведения, соответствует этапам анализа простейших систем. Другими словами, прежде чем исследовать любую сложную систему со многими переменными, необходимо сначала выполнить анализ простой системы с минимальным числом степеней свободы. После этого можно перенести все этапы этого анализа на сложную систему, заменяя каждую величину соответствующей ей n -матрицей. Этот прием называется *постулатом первого обобщения* и выражается следующим образом [7]: метод анализа и окончательные уравнения, описывающие поведение сложной физической системы (с n степенями свободы), могут быть найдены последовательно при анализе простейшего, но наиболее общего элемента системы при условии, что каждая величина заменяется соответствующей n -матрицей. Простейший элемент системы может иметь одну или несколько степеней свободы.

Очевидно, что простое увеличение числа элементов не вводит никаких новых физических явлений, которые не наблюдались бы в простейшем элементе, а, следовательно, новые символы, представляющие новые физические понятия, не могут возникнуть при объединении нескольких элементов. Оказывается, что организация множества величин в одну n -матрицу и представление последней с помощью одной базовой буквы является чем-то несравненно большим, чем эффективный рабочий прием. Организация множества величин в n -матрицу и одновременное введение понятий "преобразование", "инвариантность", "группа" создает условия для получения принципиально новой математической сущности, обладающей такими свойствами, которые отсутствуют в образующих ее строительных блоках. "Созидание посредством "организации" новых сущностей из простого набора n -матриц и наделение этих новых сущностей новыми свойствами и составляет основную цель тензорного анализа" [17-21].

Постулат второго обобщения является фундаментальным предположением тензорного анализа и состоит в следующем: 1) новая система описывается тем же числом n -матриц и того же типа, что и старая система, но отличается от нее численным значением компонент n -матриц; 2) уравнение новой системы, записанное в n -матрицах, имеет тот же вид, что и уравнение старой системы; 3) n -матрицы новой системы могут быть найдены из n -матриц старой системы с помощью рутинного преобразования.

Таким образом, переход от одного способа соединения блоков некоторой системы к другому не требует введения новых n -матриц и изменения формы уравнений. Отличие

состоит в том, что n -матрицы, принадлежащие разным уравнениям, имеют разные компоненты.

Операцию перехода от одного способа соединения к другому мы назвали преобразованием системы координат. При решении различных физических проблем часто возникают многочисленные типы систем координат, которые радикально отличаются друг от друга, а физические явления при рассмотрении их в различных типах систем координат описываются уравнениями различного вида. В данном случае понятия *геометрический объект* недостаточно для объединения уравнений различных типов систем, так как в уравнениях движения, описывающих данные системы, появляются производные и дифференциалы, которые не преобразуются как тензоры, поскольку они зависят от типа движения частей, образующих систему. Для того, чтобы объединить уравнение движения электродинамических систем независимо от относительного движения материальных или электрических составляющих, все производные и дифференциалы (не являющиеся тензорами) должны быть заменены тензорами так, чтобы каждый символ, каждый геометрический объект в уравнениях стал тензором. Это преобразование проводится в соответствии с *постулатом третьего обобщения*.

2. Тензорная методология исследования СП-структур

2.1. Построение тензорных уравнений. Пусть \mathbf{d} и \mathbf{d}^+ векторы, описывающие множество входных и множество выходных позиций перехода t , то есть $d_i^- > 0$, если $p_i \in pre(t)$ и $d_i^+ > 0$, если $p_j \in post(t)$. Элементы векторов \mathbf{d} и \mathbf{d}^+ принимают положительные целочисленные значения. Построим вектор $\mathbf{d} = \mathbf{d}^+ - \mathbf{d}^-$. Данный вектор описывает связи перехода t с позициями СП-структуры: $d_i > 0$, если $p_i \in post(t)$; $d_i < 0$, если $p_i \in pre(t)$; $d_i = 0$, если $p_i \notin ((post(t) \cup pre(t)))$, где $i = 1, 2, \dots, n$; $n = |P|$; P - множество позиций СП-структуры.

Уравнение изменения разметки СП-структуры при срабатывании перехода t можно записать следующим образом:

$$\mu' = \mu + \mathbf{d}, \quad (1)$$

где μ - старый вектор разметки СП-структуры, μ' - вектор разметки СП-структуры после срабатывания перехода t .

В соответствии с постулатом первого обобщения уравнение (1) можно представить следующим образом:

$$\mu' = \mu + D \times f(\sigma),$$

где $f(\sigma)$ - степень последовательности срабатывания, представляющая собой вектор, каждый элемент которого указывает на количество срабатываний

соответствующего перехода СП-структуры; D - матрица инцидентности, составленная из векторов d , построенных для каждого перехода, то есть $D = O - I$, где $I: P \times T \rightarrow \{0,1,2,\dots\}$ и $O: T \times P \rightarrow \{0,1,2,\dots\}$.

Если учесть, что СП-структура начинает функционировать от начальной разметки μ_0 , то

$$\mu = \mu_0 + D \times f(\sigma) \quad . \quad (2)$$

Уравнение (2) в индексной форме имеет следующий вид:

$$\mu^\gamma = \mu_0^\gamma + D_\beta^\gamma \times f(\sigma)^\beta,$$

где индексы γ и β изменяются от 1 до n и от 1 до m соответственно; $n = |P|$, $m = |T|$.

Рассмотрим проекции N и N' некоторой СП-структуры в различных системах координат, описываемых матрицами инцидентности D_β^γ , и $D_{\beta'}^{\gamma'}$. Пусть переход от одной системы координат к другой определяется тензорами преобразования $C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'}$ и $E_{\beta\gamma'}^{\beta'\gamma}$, то есть:

$$D_{\beta'}^{\gamma'} = C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} \times D_\beta^\gamma \quad (3)$$

$$D_\beta^\gamma = E_{\beta\gamma'}^{\beta'\gamma} \times D_{\beta'}^{\gamma'} \quad (4)$$

На основе второго постулата обобщения можно записать, что:

$$\mu_\alpha^\gamma = \mu_{0\alpha}^\gamma + D_\beta^\gamma \times f(\sigma)_\alpha^\beta \quad (5)$$

$$\mu_{\alpha'}^{\gamma'} = \mu_{0\alpha'}^{\gamma'} + D_{\beta'}^{\gamma'} \times f(\sigma)_{\alpha'}^{\beta'} \quad (6)$$

где α (α') - мощность множеств степеней последовательностей срабатывания ($f(\sigma)_\alpha^\beta$ ($f(\sigma)_{\alpha'}^{\beta'}$)) и достижимых разметок μ_α^γ ($\mu_{\alpha'}^{\gamma'}$) в СП-структуре N (N').

Попытаемся получить зависимости между множествами достижимых разметок СП-структур N и N' . Для этого умножим правую и левую части уравнения (5) на тензор $C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'}$:

$$C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} \times \mu_\alpha^\gamma = C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} \mu_{0\alpha}^\gamma + C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} \times D_\beta^\gamma \times f(\sigma)_\alpha^\beta$$

Учитывая соотношение (3), свойства инварианта $C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} \times \mu_{0\alpha}^\gamma = \mu_{0\alpha}^\gamma = \mu_{0\alpha'}^{\gamma'}$ и то, что $f(\sigma)_\alpha^\beta = f(\sigma)_{\alpha'}^{\beta'}$ (эквивалентность последовательностей воздействия на СП-структуры N и N'), получаем:

$$C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} \times \mu_\alpha^\gamma = \mu_{0\alpha'}^{\gamma'} + D_{\beta'}^{\gamma'} \times f(\sigma)_{\alpha'}^{\beta'}. \quad (7)$$

Сравнивая выражения (6) и (7), можно получить, что:

$$\mu_{\alpha'}^{\gamma'} = C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} \times \mu_\alpha^\gamma. \quad (8)$$

Аналогичным образом можно получить, что:

$$E_{\beta\gamma'}^{\beta'\gamma} \times \mu_{\alpha'}^{\gamma'} = \mu_{0\alpha}^{\gamma} + D_{\beta}^{\gamma} \times f(\sigma)_{\alpha}^{\beta} \quad (9)$$

$$\text{и} \quad \mu_{\alpha}^{\gamma} = E_{\beta\gamma'}^{\beta'\gamma} \times \mu_{\alpha'}^{\gamma'}. \quad (10)$$

2.2. Выбор примитивной системы. Постулат второго обобщения утверждает, что если компоненты геометрических объектов известны для одной частной системы координат, то для любой другой системы координат того же типа (число которых в общем случае бесконечно) компоненты этих геометрических объектов могут быть определены рутинной процедурой с помощью тензоров преобразования. Уравнения поведения, записанные в терминах геометрических объектов, имеют одинаковый вид для всех систем данного типа.

Следует заметить, что совершенно несущественно, какова та частная система (и связанная с ней система координат), в которой заданы геометрические объекты и инвариантное уравнение. С другой стороны, до того как постулат может быть использован, необходимо, чтобы уравнения поведения в терминах геометрических объектов были уже известны, по крайней мере для одной частной системы, и в этой же системе известны все компоненты всех геометрических объектов. Тогда эта система может быть использована как стартовая точка при анализе других систем того же класса. Далее, когда нужно анализировать уравнения функционирования большого числа систем, то представляется логичным из всего многообразия систем выделить одну частную систему (и связанную с ней систему координат), для которой сравнительно легко можно:

- 1) определить компоненты различных геометрических объектов, которые необходимы для решения конкретной задачи в численном виде;
- 2) установить тензоры преобразования, показывающие, чем эта частная система и связанная с ней система координат отличаются от любой другой системы;
- 3) вычислить новые компоненты различных геометрических объектов, которые должны быть проанализированы во всех других системах.

Эта частная система и связанная с ней система координат, выделенная из большого числа подобных систем и используемая как стартовая точка, будет называться в дальнейшем *примитивной системой*.

В общем случае имеется столько примитивных систем, сколько существует различных типов фундаментальных систем, подлежащих анализу, и используемых точек зрения. Кроме того, чем больше деталей системы должно быть рассмотрено, тем более

сложную форму принимает примитивная система. Выбор той или иной системы из множества возможных в качестве примитивной системы достаточно произволен и определяется способностью выбранной системы удовлетворять заданным условиям.

Если система используется в качестве стартовой точки для установления характеристик одной или нескольких новых систем, то в этом случае вычисления носят один и тот же рутинный характер и требуют применения одних и тех же процедур для каждой новой системы, а именно:

- 1) построения тензоров преобразования;
- 2) вычисления новых компонент геометрических объектов с помощью формул преобразования;
- 3) отображения полученных результатов на исходную систему.

С точки зрения простоты исследования сложных СП-структур с помощью более наглядных и удобных проекций в других системах координат заслуживают внимания два вида примитивных систем: первая - система, представляющая собой совокупность линейно-циклических фрагментов (N_L), которые получаются в результате операций деления [22, 23] позиций и переходов исследуемой СП-структуры; вторая - система, представляющая собой множество элементарных переходов (N_{PR}).

Сравнивая данные примитивные системы, можно отметить следующее: 1) обе системы являются достаточно простыми для исследования; 2) достоинством системы N_L по отношению к системе N_{PR} является то, что она структурно описывает число параллельно взаимодействующих процессов, а также взаимосвязь последовательных операций в каждом процессе; 3) достоинством системы N_{PR} по отношению к системе N_L является возможность генерации более мощного множества СП-структур (путем объединения позиций и переходов).

2.3. Декомпозиция СП-структур. Общие положения. Алгоритмы. Часто случается, что некоторую систему строят из нескольких частей. Причем компоненты каждой из отдельных частей уже бываю вычислены в предыдущих исследованиях. В таких случаях можно снова разбить систему на уже встречавшиеся ранее и незнакомые части, а затем объединить их снова с помощью тензоров преобразования. Таким образом, многие полученные ранее при анализе отдельных систем результаты можно снова использовать уже при анализе результирующей системы.

Подобный метод рассуждения можно использовать не только, когда система состоит из известных частей, но и тогда, когда необходимо анализировать уже существующую сложную систему, которую трудно рассматривать как одно целое. Обычно сложную систему можно разбить на несколько составляющих подсистем

(подвергнуть декомпозиции), которые в отдельности легче исследовать и геометрические объекты которых легче получить. После того как каждая составляющая подсистема исследована в отдельности, объединить их в одно целое несравненно легче, чем анализировать исходную систему. В итоге сущность декомпозиционных методов заключается в разбиении сложной системы на более простые, в исследовании этих простых систем и объединении результатов с целью получения некоторого целостного и единого решения. Идея применения методов декомпозиции в задачах параллельной обработки информации состоит в том, что структурированная тем или иным образом задача представляет собой определенную систему, структура которой является графом общего вида.

Рассмотрим с общих позиций основные положения исчисления систем и декомпозиции. Под *исчислением систем* понимается формализованная теория систем, которая включает в себя формальный логический язык Λ , определенную системную структуру Θ и набор аксиом Z данной системной структуры, который дает возможность при помощи логического языка получать теоремы теории систем. Таким образом, исчисление систем - это тройка следующего вида:

$$\Phi = \langle \Lambda, \Theta, Z \rangle .$$

Как правило, языком исчисления систем является один из формализованных логических языков, а системной структурой Θ с аксиомами Z - математическая структура определенного рода с некоторой типовой характеристикой. При этом род структуры определяется ее аксиомами, а типовая характеристика - шкалой множеств.

Одним из шагов при построении исчисления систем является установление аксиоматики таких систем, которые могут соединяться между собой. Для этого вводятся входные и выходные терминалы, при помощи которых реализуются соединения систем, индуцирующие разнообразные структурные решения. При этом устанавливаются наиболее общие условия, которым должны удовлетворять соединения, чтобы их можно было отнести к классу операций. Аналогии теоретико-множественных операций (объединение, пересечение) на системах могут быть определены на подсистемах данной системы. При этом подсистемы определяются так, чтобы они имели все характерные свойства системы (наличие входных и выходных терминалов, наличие путей, ведущих от входа к выходу, и др.). Все операции соединения можно считать частным случаем операции Δ - соединения, которая определяется следующим образом. Пусть S_1, \dots, S_n - системы, а $b(S_1), \dots, b(S_n)$ - множества их терминалов. Определим на терминалах отношение соединения Δ $b(S_1) \dots b(S_n)$, которое описывает соединение терминалов систем S_1, \dots, S_n . Обозначим n -арную операцию соединения систем S_1, \dots, S_n при помощи

отношения соединения Δ через $\Delta[S_1, \dots, S_n]$. В том случае, когда $n=2$, операцию Δ - соединения будем записывать в виде $\Delta[S_1, S_2]$.

Рассмотрим частные случаи бинарной операции Δ - соединения. Операция прямой суммы систем получается в том случае, когда $\Delta = \emptyset$. Это означает, что S_1 и S_2 не имеют общих терминалов. Операция самосоединения определяется в случае, когда $S_1 = S_2 = S$ и $\Delta = b(S) \quad b(S)$. Это означает, что соединяются терминалы, принадлежащие одной системе.

Таким образом, в качестве основной модели исчисления терминальных систем можно выбрать алгебру соединений терминальных систем, то есть систем, способных к соединению с помощью терминалов. Алгебра соединений дается в виде

$$\Psi = \langle W, V, \Delta, \Omega \rangle,$$

где W - множество всех терминальных систем; V - множество отношений соединения систем из W ; Ω - сигнатура операций на отношениях из V .

Исчисление терминальных систем может стать основой разработки различных декомпозиционных методов, поскольку оно дает возможность корректно определить Δ - декомпозицию систем. Будем говорить, что система S поддается Δ - декомпозиции на системы S_1 и S_2 , если для $S \in W$ найдутся такие системы $S_1 \in W$ и $S_2 \in W$, и такое отношение $\Delta \in V$, что будет иметь место равенство $\Delta[S_1, S_2] = S$. Очевидно, что можно рассматривать декомпозицию в более общем плане, а именно Δ - декомпозицию системы S на системы S_1, \dots, S_n , которая имеет место в том случае, когда для S найдутся такие системы S_1, \dots, S_n и такое отношение Δ , что будет выполняться равенство $S = \Delta[S_1, \dots, S_n]$.

Отобразим вышесказанное на аппарат СП-структур. Под системной структурой Θ с аксиомами Z будем понимать СП-структуры и правила их построения. Под множеством входных и выходных терминалов будем понимать множество входных и выходных позиций СП-структур. Модель исчисления терминальных систем Ψ можно интерпретировать следующим образом: W - примитивная система либо система линейных базовых фрагментов размерностью m ; V - множество отношений соединения позиций и переходов; Δ -соединение - операция соединения подмножеств позиций и переходов, которая выполняется на множестве СП-структур.

Рассмотрим процедуру анализа исходной СП-структуры и построения эквивалентной СП-структуры с использованием приемов декомпозиции и тензоров преобразования. Для этого дадим некоторые определения и обозначения:

исходная СП-структура (N_I) - некоторая структура из заданного класса СП-структур;

линейная СП-структура (N_L) - структура, полученная в результате декомпозиции

исходной СП-структуры (\mathbf{N}_I) и представленная набором линейных и линейно-циклических базовых фрагментов (ЛБФ);

примитивная система (\mathbf{N}_{PR}) - множество элементарных сетей, мощность которого определяется числом переходов линейной СП-структуры (\mathbf{N}_L);

эталонная модель (\mathbf{N}) - СП-структура, полученная из примитивной системы путем объединения заданного множества вершин;

эквивалентная СП-структура (\mathbf{N}') - структура, полученная из эталонной модели с помощью тензора преобразования $C_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'}$.

Процедуру построения эквивалентной СП-структуры можно представить этапами, приведенными ниже.

Этап 1. Построение системы ЛБФ.

На данном этапе исходная СП-структура \mathbf{N}_I преобразуется в систему ЛБФ \mathbf{N}_L . В процессе данного преобразования необходимо решить две задачи: 1) выделить в \mathbf{N}_I все имеющиеся линейно-циклические фрагменты; 2) разделить оставшуюся после выделения циклов СП-структуру на линейные фрагменты.

Для поиска линейно-циклических фрагментов можно использовать понятие достижимости из теории графов, на основе чего алгоритм поиска циклов будет иметь следующий вид.

Алгоритм 1. Поиск и выделение циклов в СП-структурах.

Исходные данные: матрицы инцидентности $I(p,t)$ и $O(p,t)$, число переходов m и число позиций n в СП-структуре \mathbf{N}_I .

Выходные данные: последовательность вершин \mathbf{v} СП-структуры \mathbf{N}_I , образующая цикл.

А. Поиск циклов.

1. Построить обобщенную матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{T} \\ \mathbf{P} & \mathbf{T} \end{pmatrix}$ размерностью $((n+m) \times (n+m))$ СП-структуры \mathbf{N}_I и вектор вершин $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{T} \end{pmatrix}$ размерностью $(n+m)$.
2. Построить матрицу достижимости $\mathbf{AD} = \mathbf{A}$ путями длиной в одну дугу.
3. Пусть $i = 2$.
4. Построить матрицу достижимости путями длиной в i дуг: $\mathbf{AD} = \mathbf{AD} \times \mathbf{A}$.
5. Если на главной диагонали матрицы \mathbf{AD} стоят только нули, то есть $\mathbf{AD}(i,i) = 0$, для $i = \overline{1, n+m}$, то переход к п.6; иначе - переход к п. 8.

6. Пусть $i = i + 1$.

7. Если $i \leq n+m$, то переход к п. 4; иначе: "СП-структура \mathbf{N}_I не содержит циклов", СТОП.

Б. Выделение циклов.

8. Пусть $\mathbf{AD}(k,k) \neq 0$.

9. Пусть $j = 1, h = k, \mathbf{X}(0) = \{\mathbf{B}(k)\}, Y(i) = \{\mathbf{B}(k)\}$.

10. Построить множество вершин $X(j)$ и $Y(h)$: $X(j) = post(X(j-1)), Y(h) = pre(Y(h+1))$

11. Пусть $j = j + 1, h = h - 1$.

12. Если $j \leq i$, то переход к п. 10; иначе - переход к п. 13.

13. Если $(\mathbf{B}(k) \in X(i)) \& (\mathbf{B}(k) \in Y(0))$, то переход к п. 14; иначе: "ошибка", СТОП.

14. Пусть $j = 0$.

15. Выполнить: $Z(j) = X(j) \cap Y(j)$.

16. Пусть $j = j + 1$.

17. Если $j \leq i$, то переход к п. 15; иначе - переход к п. 18.

В. Построение последовательности вершин.

Пусть $\mathbf{v} = \emptyset, d = Z(0)$.

Пусть $j = 1, \mathbf{v} = \mathbf{v} \parallel Z(0), d = Z(0)$.

Объединить \mathbf{v} с любым элементом множества $post(d) \cap Z(j)$. Пусть данным элементом будет

$z_q \in post(d) \cap Z(j)$, тогда: $\mathbf{v} = \mathbf{v} \parallel z_q$.

Пусть $j = j + 1, d = z_q$.

Если $j \leq i - 1$, то переход к п. 20; иначе - переход к п. 23.

Конец алгоритма.

Разделение элементов СП-структуры и отображение разметки позиций будем проводить с использованием операций, описанных в [7]. Процесс разделения СП-структуры на ЛБФ сводится к последовательной проверке условий (11) и (12) над вершинами СП-структуры и выполнения при необходимости операции разделения. Данный процесс продолжается до тех пор, пока указанные условия выполняются хотя бы для одной вершины.

$$|pre(t)| + |post(t)| > 2 \quad (11)$$

$$|pre(p)| > 1 \text{ или } |post(p)| > 1 \quad (12)$$

В итоге последовательность действий на первом этапе можно описать следующим образом.

Алгоритм 2. Выделение линейных и линейно-циклических фрагментов.

Поиск циклов в СП-структуре \mathbf{N}_I .

Если цикл найден, выделить его из СП-структуры \mathbf{N}_I , образовать линейно-циклический фрагмент и перейти к пункту 1; если в СП-структуре циклов нет или выделены все циклы - перейти к пункту 3.

Разделить полученную после выделения циклов СП-структуру N_I на линейные фрагменты.

Получить систему ЛБФ N_L .

Пример. Рассмотрим пример разложения исходной СП-структуры N_I (рис. 1) на систему ЛБФ.

1. Обобщенная матрица A для СП-структуры N_I имеет вид, представленный на рис. 2 (содержимое пустых клеток соответствует «0»). В более компактной форме данную матрицу можно представить следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} \emptyset & O \\ I & \emptyset \end{pmatrix},$$

где O и I - матрицы инцидентности.

2. При $i=6$ (то есть $AD = A^6$) мы получим значения элементов $AD(17,17)$, $AD(7,7)$, $AD(18,18)$, $AD(8,8)$, $AD(19,19)$, $AD(9,9)$, расположенных на главной диагонали, отличные от нуля.

3. Пусть $k = 17$. Тогда

$$\begin{aligned} X(0) &= \{p8\}, Y(6) = \{p8\}, & X(1) &= \{t6\}, Y(5) = \{18\}, \\ X(2) &= \{p2\}, Y(4) = \{p9\}, & X(3) &= \{t5, t7\}, Y(3) = \{t7\}, \\ X(4) &= \{p3, p9\}, Y(2) = \{p2\}, & X(5) &= \{t11, t8\}, Y(1) = \{t6\}, \\ X(6) &= \{p10, p8\}, Y(0) = \{p8\}. \end{aligned}$$

Строим множества $Z(j)$, $j = \overline{0,5}$, которые принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} Z(0) &= \{p8\}, & Z(1) &= \{t6\}, \\ Z(2) &= \{p2\}, & Z(3) &= \{t7\}, \\ Z(4) &= \{p9\}, & Z(5) &= \{t8\}. \end{aligned}$$

4. Строим последовательность вершин, образующих цикл: $v_1 = (p8, t6, p2, t7, p9, t8)$.

После выделения последовательности v_1 СП-структура N_I примет вид N'_I , представленный на рис.3,а. Выделенный при этом линейно-циклический фрагмент (фр. 1), представлен на рис.4.

6. Строим обобщенную матрицу A' для СП-структуры N'_I и возводим ее в степень. При $i = 8$ ($AD = (A')^8$) получим значения элементов, расположенных на главной диагонали AD , отличные от нуля.

Пусть $k = 11$. Тогда:

$$\begin{aligned} X(0) &= \{p1\} \text{ и } Y(8) = \{p1\}, & X(1) &= \{t1\} \text{ и } Y(7) = \{t9\}, \\ X(2) &= \{p4, p6\} \text{ и } Y(6) = \{p10\}, & X(3) &= \{t2, t3\} \text{ и } Y(5) = \{t4, t11\}, \end{aligned}$$

$$X(4) = \{p3, p5\} \text{ и } Y(4) = \{p3, p5\},$$

$$X(5) = \{t4, t11\} \text{ и } Y(3) = \{t2, t3, t5\},$$

$$X(6) = \{p10\} \text{ и } Y(2) = \{p4, p6, p21\},$$

$$X(7) = \{t9\} \text{ и } Y(1) = \{t1\},$$

$$X(8) = \{p1\} \text{ и } Y(0) = \{p1\}.$$

Строим множества $Z(j)$, при $j = \overline{0,7}$:

$$Z(0) = \{p1\}, Z(4) = \{p3, p5\}, Z(1) = \{t1\}, Z(5) = \{t4, t11\}, Z(2) = \{p4, p6\}, Z(6) = \{p10\}, \\ Z(3) = \{t2, t3\}, Z(7) = \{t9\}.$$

Строим последовательность вершин v_2 , образующих цикл. Для определенности в качестве элемента z_q будем всегда брать первый элемент множества $post(d) \cap Z(j)$. Тогда: $v_2 = (p1, t1, p4, t2, p5, t4, p10, t9)$.

После выделения последовательности v_2 СП-структура N'_I примет вид N''_I , изображенный на рис.3,б. Выделенный линейно-циклический фрагмент (фр.2) представлен на рис.4.

Дальнейший поиск показывает, что в СП-структуре N'_I циклов нет. Поэтому выполняем деление вершин СП-структуры до тех пор, пока выполняются условия (11) и (12). Результаты деления (фрагменты 3 и 4) представлены на рис.4.

Этап 2. Построение примитивной системы.

На данном этапе на основе системы ЛБФ строится примитивная система (N_{PR}). Данная система включает в себя множество элементарных переходов, которые входят во фрагменты системы ЛБФ. На рис.5 изображена примитивная система, которая получена на основе системы ЛБФ, представленной на рис.4. Чтобы сопоставить примитивную СП-структуру N_{PR} и систему ЛБФ N_L , построим для N_L эквивалентную СП-структуру (N_{LE}), которая будет включать все множество позиций и переходов, входящих в СП-структуру N_{PR} . Данная СП-структура изображена на рис.6.

Можно отметить, что действия, соответствующие 1-му этапу, представляют собой декомпозицию СП-структуры, а совокупность 1-го и 2-го этапов соответствуют анализу СП-структуры, интерпретирующей сложную ВС.

Этап 3. Построение эталонной модели.

Эталонная модель строится путем отображения некоторого множества связей вершин на примитивную систему (путем выполнения программы объединения). При этом следует учитывать то, что примитивная система представляет собой систему ЛБФ, но выраженную в другой системе координат, т.е. примитивная система в иной системе координат учитывает связи, задаваемые ЛБФ в исходной системе координат. Следовательно, для построения эталонной модели, которая описывала бы, например, связи исходной СП-структуры N_I , но в системе координат примитивной системы, необходимо между вершинами N_{PR} восстановить связи, которые были разорваны на

этапе декомпозиции (при построении множества ЛБФ). Поэтому для получения исходной СП-структуры N_I (рис.1) преобразование примитивной системы будет определяться программой 1.

Программа 1: $t_1 = t_{011} + t_{012}$, $p_3 = p_{31} + p_{32}$, $p_1 = p_{11} + p_{12}$, $p_{10} = p_{101} + p_{102}$, $p_2 = p_{21} + p_{22}$.

Учитывая обозначения примитивной системы, программу 1 можно представить в следующем виде.

Программа 2: $t_1 = t_{011} + t_{012}$, $p_3 = p_{31}' + p_{31}'' + p_{32}$, $p_1 = p_{11}' + p_{11}'' + p_{12}$, $p_{10} = p_{101}' + p_{101}'' + p_{102}$, $p_2 = p_{21} + p_{22}' + p_{22}''$.

Матрица инцидентности эталонной модели, полученной в результате выполнения программы 2, изображена на рис.7,а (содержимое пустых клеток соответствует «0»).

Этап 4. Построение эквивалентной СП-структуры.

Эквивалентная СП-структура получается в результате преобразования эталонной модели в соответствии с выражением (3). Предположим, что СП-структуры N_L и N_{PR} - это выражения одной и той же СП-структуры, но представленные в различных системах координат. Поэтому должен существовать тензор преобразования, переводящий представление СП-структуры из одной системы координат в другую. При этом, как инвариант, должна сохраняться начальная разметка СП-структуры. Пусть матрицы инцидентности $D_{L\beta'}^{\gamma'}$ и $D_{PR\beta}^{\gamma}$ описывают СП-структуры N_L и N_{PR} соответственно. Тогда имеет место следующая система уравнений:

$$\begin{cases} D_{L\beta'}^{\gamma'} = C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} \times D_{PR\beta}^{\gamma} \\ \mu_{OPR}^{\gamma'} = C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'} \times \mu_{OL}^{\gamma} \\ \mu_{OL}^{\gamma} = \mu_{OPR}^{\gamma'} \end{cases} \quad (11)$$

Из данной системы можно определить искомый тензор преобразования $C_{\beta'\gamma}^{\beta\gamma'}$.

Очевидно, что действия, выполняемые на 3-м и 4-м этапах, соответствуют процедуре синтеза СП-структур на основе наперед заданного множества связей между вершинами примитивной системы.

Анализируя матрицу инцидентности $D_{L\beta'}^{\gamma'}$, которая описывает систему ЛБФ N_L , можно заметить, что $D_{L\beta'}^{\gamma'}$ может быть представлена суммой матриц инцидентности $D_{L\beta'}^{\gamma'}(i)$, описывающих каждый линейный фрагмент:

$$D_{L\beta'}^{\gamma'} = D_{L\beta'}^{\gamma'}(1) + D_{L\beta'}^{\gamma'}(2) + \dots + D_{L\beta'}^{\gamma'}(k), \quad (12)$$

где k - число линейных фрагментов, операция "+" представляет собой операцию сложения матриц, которые имеют различные области изменения индексов (разные размерности).

Пусть матрица $D_{L\beta'}^{\gamma'}(i)$ имеет n_i строк и m_i столбцов ($n_i \times m_i$).

Из-за специального характера решаемых задач введем операцию сложения n -матриц [3].

1. Две матрицы одной размерности складываются суммированием их соответствующих элементов.

2. Часто встречаются случаи сложения двух матриц, которые имеют различные области изменения индексов, например $D_{\beta'}^{\gamma'}$ и D_{β}^{γ} . В этом случае формируются матрицы с одинаковыми областями изменения индексов: $\gamma+\gamma'$ и $\beta+\beta'$.

Очевидно, что матрица инцидентности $D_{PR\beta}^{\gamma}$, описывающая примитивную систему, также может быть представлена в виде

$$D_{PR\beta}^{\gamma} = D_{PR\beta}^{\gamma}(1) + D_{PR\beta}^{\gamma}(2) + \dots + D_{PR\beta}^{\gamma}(k), \quad (13)$$

где $D_{PR\beta}^{\gamma}(i)$ ($i = \overline{1, k}$) представляет собой матрицу инцидентности, которая описывает часть примитивной системы, включающую только те переходы, которые входят, в линейный фрагмент $D_{L\beta'}^{\gamma'}(i)$. В этом случае число строк и столбцов матрицы $D_{PR\beta}^{\gamma}(i)$ также равно n_i и m_i ($n_i \times m_i$) (в силу постоянства размерности пространства).

Подставим выражения (12) и (13) в (3). Получим:

$\mathcal{E}(\gamma')p$. В этом случае число строк и столбцов матрицы $D(i)$ также равно n_i и m_i ($n_i \times m_i$).

$$D_{L\beta'}^{\gamma'}(1) + D_{L\beta'}^{\gamma'}(2) + \dots + D_{L\beta'}^{\gamma'}(k) = C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'} \times (D_{PR\beta}^{\gamma}(1) + D_{PR\beta}^{\gamma}(2) + \dots + D_{PR\beta}^{\gamma}(k)) = \\ C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'} \times D_{PR\beta}^{\gamma}(1) + C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'} \times D_{PR\beta}^{\gamma}(2) + \dots + C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'} \times D_{PR\beta}^{\gamma}(k) \quad (14)$$

В соответствии с правилами умножения матриц для получения значения первого слагаемого ($C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'} \times D_{PR\beta}^{\gamma}(1)$) выражения (14) будут использованы лишь те элементы (c_{ij}) ТП $C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'}$, индексы которых удовлетворяют неравенствам: $1 \leq i \leq n_1$ и $1 \leq j \leq n_1$; для получения значения второго слагаемого ($C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'} \times D_{PR\beta}^{\gamma}(2)$) будут использованы элементы (c_{ij}) , индексы которых удовлетворяют неравенствам: $n_1 + 1 \leq i \leq n_2$ и $n_1 + 1 \leq j \leq n_2$.

Аналогично для получения значения l -го слагаемого ($C_{\beta'\gamma'}^{\beta\gamma'} \times D_{PR\beta}^{\gamma}(l)$) будут использованы элементы (c_{ij}) , индексы которых удовлетворяют неравенствам:

$$\sum_{q=1}^{l-1} n_q + 1 \leq i \leq \sum_{q=1}^l n_q,$$

$$\sum_{q=1}^{l-1} n_q + 1 \leq j \leq \sum_{q=1}^l n_q .$$

Обозначим выделенные части ТП $C_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'}$ следующим образом:

$$C(1)_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'}, C(2)_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'}, \dots, C(l)_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'}, \dots, C(k)_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'} .$$

Тогда ТП $C_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'}$ можно представить суммой:

$$C_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'} = C(1)_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'} + C(2)_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'} + \dots + C(l)_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'} + \dots + C(k)_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'} \tag{15}$$

где "+" - сложение матриц с разной областью изменения индексов.

Учитывая (14) и (15), систему (11) можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} D(i)_{L\beta'}^{\gamma'} = C(i)_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'} \times D(i)_{PR\beta}^{\gamma} \\ \mu(i)_{OPR}^{\gamma'} = C(i)_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'} \times \mu(i)_{OL}^{\gamma} \\ \mu(i)_{OL}^{\gamma} = \mu(i)_{OPR}^{\gamma'} \end{cases} \tag{16}$$

откуда можно найти i -ю часть $(C(i)_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'})$ ТП $C_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'}$, которая связывает i -й линейный фрагмент системы ЛБФ N_L с соответствующей частью элементарных переходов примитивной системы N_{PR} . Выражение (15) позволяет найти новые методы построения ТП с целью объединения результатов исследования отдельных частей сложных СП-структур в одно целое.

Аналогичные рассуждения можно привести относительно ТП $E_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'}$, который должен удовлетворять системе (17):

$$\begin{cases} D_{PR\beta}^{\gamma} = E_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'} \times D_{L\beta'}^{\gamma'} \\ \mu_{OL}^{\gamma} = E_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'} \times \mu_{OPR}^{\gamma'} \\ \mu_{OL}^{\gamma} = \mu_{OPR}^{\gamma'} \end{cases} \tag{17}$$

и получить, что: $E_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'} = E(1)_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'} + E(2)_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'} + \dots + E(k)_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'}$

(18)

и $\begin{cases} D(i)_{PR\beta}^{\gamma} = E(i)_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'} \times D(i)_{L\beta'}^{\gamma'} \\ \mu(i)_{OL}^{\gamma} = E(i)_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'} \times \mu(i)_{OPR}^{\gamma'} \\ \mu(i)_{OL}^{\gamma} = \mu(i)_{OPR}^{\gamma'} \end{cases}$ \tag{19}

Возвращаясь к нашему примеру, можно найти один из возможных вариантов тензора преобразования $C_{\beta\gamma}^{\beta\gamma'}$, который представленный на рис.8. Матрица инцидентности, полученная из уравнения (3), представлена на рис.7,б, а соответствующая эквивалентная СП-структура N' и вектор начальной разметки μ_0' изображены на рис.9. В результате минимизации СП-структуры N' путем сокращения эквивалентных вершин можно прийти к исходной СП-структуре N_L .

Заключение.

Результаты работы говорят о том, что кроме понятных для человека непрерывных пространств, существуют дискретные пространства. Это подтверждает положения работы [24] о возможной дискретности информационного пространства. Дискретность пространства требует применения новой геометрии, которая в данном случае описывается тензорными методами.

С прикладной стороны в данной статье описан тензорный подход к исследованию сложных систем, представленных в терминах сетей Петри. При этом введены понятия различных систем, которые представляют исходную СП-структуру и ее производные в различных системах координат. Следует отметить, что использование тензорных методов, существенно упрощает процедуру построения возможных структур исследуемой сложной системы в системе координат примитивной системы N_{PR} , а также делает рутинной процедуру преобразования новых структур сложных систем в исходную систему координат. Особо следует выделить понятие эквивалентных СП-структур, которые соответствуют новым возможным структурам анализируемой сложной системы, отвечающим тем же функциональным свойствам, но имеющим другие характеристики, например, с точки зрения параллельности или последовательности выполнения операций. Описанный подход дает новые возможности для построения методов синтеза новых структур сложных систем.

Проблема сложности познания окружающего мира приводит к необходимости применения математического аппарата, который не имеет прямых аналогий в обыденном человеческом сознании.

Список литературы

1. Монахов С.В., Савиных В.П., Цветков В.Я. Методология анализа и проектирования сложных информационных систем. - М.: Просвещение, 2005. - 264с
2. Соловьёв И.В., Майоров А.А. Проектирование информационных систем. Фундаментальный курс: Учеб. Пособие для высшей школы/Под ред. В, П, Савиных – М.: Академический проект. 2009. – 39
3. Шрейдер Ю. А. Особенности описания сложных систем //Системные исследования: Методологические проблемы: Ежегодник. – 1983. – С. 107-124.
4. Афанасьев В.Г. Общество: системность, познание, управление. - М.: Политиздат. 1981.-432 с.
5. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. - М.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1955, - 504с
6. Кулагин В.П. Структуры сетей Петри. //Информационные технологии. – 1997. -

№4. – С.17-22.

7. Котов В.Е. Сети Петри. – М.: Наука, 1984.

8. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. – М.: Мир, 1984.

9. Кулагин В.П. Проблемы анализа и синтеза структур параллельных вычислительных систем. // Информационные технологии. 1997. №1. С.2-8.

10. 32nd International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Concurrency, 2011. - <http://www.jaist.ac.jp/acsd-petrinets2011/>.

11. 33rd International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Concurrency (Petri Nets 2012), Hamburg, Germany, June 25–29, 2012. - <http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/PetriNets/meetings/pn2012/>

12. Поляков А.А., Цветков В.Я. Прикладная информатика: Учебно-методическое пособие: В 2-х частях: Часть.2 /Под общ.ред. А.Н. Тихонова - М.: МАКС Пресс. 2008 - 860 с

13. Чурина Т. Г. Способ построения раскрашенных сетей Петри, моделирующих SDL-системы //Препр. РАН. Сиб. отд-ние. ИСИ №. – 1998.

14. Крон Г. Исследование сложных систем по частям (диакоптика). – М.: Наука, 1972. – 544 с

15. 34th International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Concurrency (Petri Nets 2013), Milano, Italy, June 24-28, 2013. - <http://www.mc3.disco.unimib.it/petrinets2013/>.

16. Transactions on Petri Nets and Other Models of Concurrency IV. Series: Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6550 / Ed. by K. Jensen, S. Donatelli, M. Koutny. – Springer-Verlag, 2011. – 225 p.

17. Transactions on Petri Nets and Other Models of Concurrency VI. Series: Lecture Notes in Computer Science, Vol. 7400 / Ed. by K. Jensen, W.M.P. van der Aalst, M. Ajmone, G. Franceschinis, J. Kleijn, L.M Kristensen. – Springer-Verlag, 2012. – 365 p.

18. Крон Г. Тензорный анализ сетей. – М.: Сов. Радио, 1978. – 720 с.

19. Петров А.Е. Тензорная методология в теории систем. – М.: Радио и связь, 1985. – 152 с.

20. Кулагин В.П. Тензорные методы проектирования структур вычислительных систем//АВТ. – 1989. - №2. – С.64-71.

21. Кулагин В.П. Методы анализа сетевых моделей вычислительных систем//Автоматизация и современные технологии. – 1993. - №1. – С.31-34.

22. Transactions on Petri Nets and Other Models of Concurrency. Series: Lecture Notes in Computer Science [Электронный ресурс]. - <http://www.springer.com/series/8379>.

23. Кулагин В.П. Исследование моделей вычислительных систем методом преобразования координат//Вычислительная техника в автоматизированных системах контроля и управления : Межвуз. сб. научн. тр. – Вып. 20 / Пенза: Пенз. политехн. ин-т. – 1990. – С. 4-7.

24. Тихонов А. Н., Иванников А. Д., Соловьёв И. В., Цветков В.Я. Основы управления сложной организационно-технической системой. Информационный аспект. - М.: МаксПресс, 2010.-228с.