

УДК 531;534;681.3.06

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ТРЕНИЯ И ИХ ВЛИЯНИЯ НА ДИНАМИКУ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Косенко И.И., д.ф.-м.н., профессор, МГТУ МИРЭА, Москва, Россия
E-mail: kosenko@mirea.ru

Аннотация. Анализируется процесс построения и верификации пространственных динамических моделей систем многих тел с использованием в качестве примера тяжелого твердого тела на горизонтальной плоскости и имеющего с ней постоянный контакт. Для формального представления моделей применяются два подхода: а) объектно-ориентированный и б) основанный на применении бондграфов. Анализируются энергетические аналогии между этими подходами. Дано детальное описание при помощи бондграфа для механической связи наиболее общего вида. Оказалось, что результирующая бондграфовая модель динамики систем тел всегда в точности имеет так называемую каноническую структуру узлов. Это представление тесно связано с развиваемой нами архитектурой объектно-ориентированной реализации модели механической связи. В качестве примеров исследуются три примера динамики тяжелого твердого тела: а) кельтский камень, б) пример А. П. Маркеева, в) китайский волчок. Каждый из упомянутых примеров демонстрирует свои особенности динамического поведения.
Ключевые слова: объектно-ориентированное моделирование; бондграф; каноническая структура узлов; кельтский камень; модель трения; китайский волчок.

A COMPARATIVE STUDY OF COMPUTER MODELS FOR FRICTION AND THEIR INFLUENCE ON DYNAMICS OF THE HEAVY RIGID BODY ON A HORIZONTAL SURFACE

Kosenko I.I., DofSci., Professor, MSTU MIREA, Moscow, Russia
E-mail: kosenko@mirea.ru

Abstract. Using an example of a heavy rigid body moving on a horizontal surface and having with it a permanent contact the process of construction and verification for spatial dynamical models of the multibody systems is analyzed. Two approaches to formal representation of the models: object-oriented, and bond graph based are applied. Energy based similarities between these approaches are analyzed. A detailed description of the bond graph representation for the most general type of constraint is presented. It turned out the resulting total bond graph model of the multibody system dynamics always has exactly a so-called canonical junction structure. This representation has a tight correspondence with our object-oriented implementation of the mechanical constraint architecture. As an example Modelica implementation of several classes in the row for mechanical contact is investigated. Computer implementations for three examples of the heavy rigid body dynamics are under investigation: (a) the rattleback, (b) example of A. P. Markeev, (c) the Tippe-Top. Among all of three examples each one demonstrates in its own manner a peculiar dynamical behavior.
Keywords: object-oriented modeling, bond graph, canonical junction structure, rattleback, friction model, tippe-top.

1. Введение

В процессе разработки компьютерной модели динамики систем тел возникает необходимость в надежной унифицированной технологии эффективного конструирования моделей. Оказалось, что язык Modelica обеспечивает инструменты для решения указанной проблемы последовательно, шаг за шагом, с использованием естественных подходов. Один из таких подходов тесно связан с так называемым мультипортовым представлением моделей, первоначально основанным на использовании теории бондграфов [1]. Последняя, в свою очередь, основана на идее энергетического взаимодействия и, в значительной степени, на сохраняемости энергии для физически взаимосвязанных подсистем любой технической категории.

Процесс верификации критически важен для разработки надежных динамических моделей систем тел. Отметим здесь, что механические примеры, включающие трение, исключительно полезны для тестирования при верификации конкретной модели. Таким образом, используются несколько примеров систем тел, включающих контакты и имеющих хорошо известное динамическое поведение.

2. Бондграфы как основа

Геометрические формализмы для представления динамики систем тел хорошо известны [2]. Эти формализмы оперируют механическими объектами известного типа (кинематические и силовые моторы) и имеющими известное информационное описание, связанное с причинностью в моделях систем тел. В таких моделях их представление тесно связано с подходом к моделированию, основанному на «перетоках мощности», так называемой теорией бондграфов [1].

В самом деле, пусть кинематика твердого тела задается мотором $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega})$, где \mathbf{v} – скорость центра масс тела и $\boldsymbol{\omega}$ – вектор его угловой скорости. Все скорости для определенности предполагаются заданными относительно некоторой базовой системы координат, твердоотельно связанной с инерциальной системой отсчета. Пусть далее силы, действующие на тело, приводятся к силовому мотору (\mathbf{F}, \mathbf{M}) , где \mathbf{F} – главный вектор сил, а \mathbf{M} – главный момент. Таким образом, полная мощность всех сил, действующих на тело, вычисляется по известной формуле $W = (\mathbf{v}, \mathbf{F}) + (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{M})$, используемой для представления мультибонда в бондграфах, моделирующих динамику систем тел. Здесь мы видим очевидную каноническую двойственность между кинематическими и силовыми моторами.

Иногда в качестве потоковых переменных выбираются силовые моторы. В других случаях эту роль играют кинематические бивекторы. Например, токи в электротехнике по своим свойствам аналогичны силам или моментам в механизмах. В этом случае

имеет место соответствие между законом Кирхгофа для токов в узле и принципом Даламбера для внешних сил и сил инерции «действующих» на тело, соответствующее такому узлу.

С нашей точки зрения более естественным является подход традиционной классической механики, двойственный к только что упомянутому. В этом случае в качестве потоковой компоненты мультибонда выбирается кинематический мотор (twist), а в качестве компоненты усилия – силовой мотор (wrench). Ниже рассматриваются примеры, демонстрирующие удобство такого выбора для конструирования моделей механических связей самых разных типов. Описание других вариантов механической связи можно найти в [3].

Поступая описанным выше образом, мы ассоциируем динамический объект твердого тела с **1**-узлом. Причина состоит в том, что **1**-узел имеет нулевую сумму усилий для всех, инцидентных этому узлу, мультибондов. Используя это свойство узла можно моделировать принцип Даламбера следующим образом: один мультибонд должен соединять данный узел с его единственным элементом инертности, в то время как другие мультибонды доставляют силы различной природы к данному узлу. С другой стороны, с **0**-узлом можно ассоциировать динамический объект механического взаимодействия, в частности – механической связи. В этом случае инцидентные мультибонды имеют нулевую сумму потоковых переменных – скоростей. **0**-узел этого типа всегда имеет три инцидентных мультибонда так, что один из них имеет потоковую переменную, равную разности потоковых переменных двух других мультибондов. Это свойство в точности соответствует свойствам относительной скорости точек тел при контактировании. Наконец, можно представить общую структуру бондграфа, моделирующего механическую связь в любой системе тел, так, как это изображено на Рис. 1. Треугольники **A** и **B** соответствуют взаимодействующим телам, а треугольник **C** обозначает связь или силовой элемент.

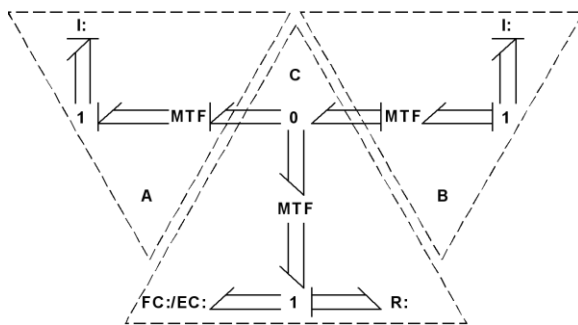


Рис. 1. Представление механической связи общего вида в виде бондграфа.

Все мультибонды здесь состоят из сигналов кинематического мотора (\mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$), представляющего потоковый компонент, и сигналов силового мотора (\mathbf{F} , \mathbf{M}), играющего

роль компоненты усилия. Причинность в элементах инертности совпадает с причинностью, существующей в системе обыкновенных дифференциальных уравнений Ньютона – Эйлера. Левый и правый трансформеры предназначены для «смещения» кинематических моторов из центров масс взаимодействующих тел в контактную точку P , вычисляемую внутри блока C , в соответствии с известной формулой Эйлера $(\mathbf{F}, \mathbf{M}) \mapsto (\mathbf{F}, \mathbf{M} + [\mathbf{r}, \mathbf{F}])$. Легко убедиться, что рассмотренные трансформеры сохраняют мощность. Заметим здесь, что контактная точка P блока C выбирается в общем случае условно, заменяя обычно пятно контакта в контактных моделях так, что в результате контактные силы, в реальности распределенные по контактному пятну, заменяются силовым мотором, «действующем» в точке P .

Центральный трансформер обеспечивает переход к ортонормированному базису, построенному в контактной точке так, что один его орт совпадает с общей нормалью к контактирующим поверхностям тел, а два других орта – касательные к этим поверхностям. Упомянутые поверхности предполагаются нами достаточно регулярными. Для определенности мы интерпретируем здесь случай обычного контактного взаимодействия тел через их внешние (или внутренние) поверхности. Пусть инерциальные координаты образуют столбцы ортогональной матрицы поворота Q . Тогда при смещении через центральный трансформер снизу вверх (Рис. 1) сигналы потоковых переменных преобразуются по формуле $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}) \mapsto (Q\mathbf{v}, Q\boldsymbol{\omega})$. Аналогично при сдвиге через трансформер в обратном направлении преобразуются переменные усилий. Соответствующая формула имеет вид $(\mathbf{F}, \mathbf{M}) \mapsto (Q^{-1}\mathbf{F}, Q^{-1}\mathbf{M})$. В результате легко видеть, что центральный трансформер также сохраняет мощность. Размещение $\mathbf{0}$ -узла, изображенного на Рис. 1, обеспечивает возможность явного вычисления относительных скоростей в контактной точке P .

Заметим, что присоединение элемента инертности к $\mathbf{1}$ -узлу является обычной практикой [4, 5]. Показанный на Рис. 1 фрагмент бондграфа напоминает, например, бондграф элемента модели дискретизации в динамике гибкой балки.

Причинность для мультибондов внутри объекта связи задается индивидуально для каждого скалярного бонда [6] в зависимости от типа связи и формируется в результате компиляции полной модели динамики системы тел. Например, если связь предполагает проскальзывание в точке контакта без сопротивления, то предполагая разложения $\mathbf{v} = \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_\tau$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_\tau$ для относительных скоростей и контактных сил можно получить следующее потоковое ограничение $\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, задаваемое при помощи $\mathbf{F}\mathbf{C}$ -элемента и представляемое одним скалярным кинематическим условием для нормальной компоненты относительной скорости.

Ограничения для усилий, задаваемые при помощи **ЕС**-элементов, в нашем случае имеют вид $\mathbf{F}_\tau = \mathbf{0}$, $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ и представляются двумя скалярными уравнениями для касательной контактной силы плюс три скалярных уравнения для пары сил в контакте. Ненулевая касательная контактная сила может возникнуть благодаря резистивному элементу (трению), изображенному справа внизу на Рис. 1. Если в этом же ключе продолжать строить бондграф для всей системы тел, то в результате можно прийти к так называемой канонической структуре узлов [6], удобной для применения формальных процедур оптимального задания причинности в результирующей графовой модели. Для этого, в частности, следует ввести промежуточные **0**-узлы для элементов податливости (**С**-элементов), подключенных к **1**-узлу.

Оставляя некоторые переменные мультибонда без задания причинности и доверяя эту работу компилятору, мы применяем тем самым технологию так называемого аказуального моделирования. С другой стороны, если мы будем более строго соблюдать принципы физического моделирования к реальным связям с учетом деформируемости тел, то вместо **FC/EC**-элементов точных ограничений мы должны использовать **С**-элемент податливости с однозначно заданной причинностью.

3. Объектно-ориентированная реализация

При использовании языка Modelica [7] мы конструируем унифицированную компьютерную модель механической связи или, более общо, любого механического взаимодействия между твердыми/деформируемыми телами. Для этого мы задаем [8, 9, 3] два класса коммуникационных портов: а) класс кинематического порта и б) класс порта для усилия. Соответственно ими являются кинематический и силовой коннекторы. Оказалось, что соединения таких типов позволяют конструировать модели взаимодействия тел, основанные на физически обоснованной причинности.

Другими словами мы рассматриваем механическую связь (или механический контакт) между двумя телами как коммуникационную сеть, работающую по следующим «правилам». Именно, объект связи предполагается импортирующим кинематическую информацию: кинематические моторы плюс дополнительные данные. Эта информация принимается от объектов взаимодействующих тел. Одновременно в качестве отклика в обратном направлении объект связи экспортирует силовые моторы плюс дополнительные данные. Таким образом, метафорически связь «вычисляет» усилия, при помощи которых связанные тела и взаимодействуют.

Введем следующую вспомогательную нотацию. При нашем подходе кинематический мотор задается классом **KinematicPort**, а силовой мотор – классом **WrenchPort**. Проследим, далее, аналогии между бондграфовым описанием, данным выше, и описы-

ваемой здесь моделью динамики систем тел. Очевидно, что пара классов **KinematicPort** / **WrenchPort** играет роль понятия мультипорта, а соответствующие пары соединений, показанные на Рис. 2, отвечают понятию мультибонда с идентично задаваемой причинностью.

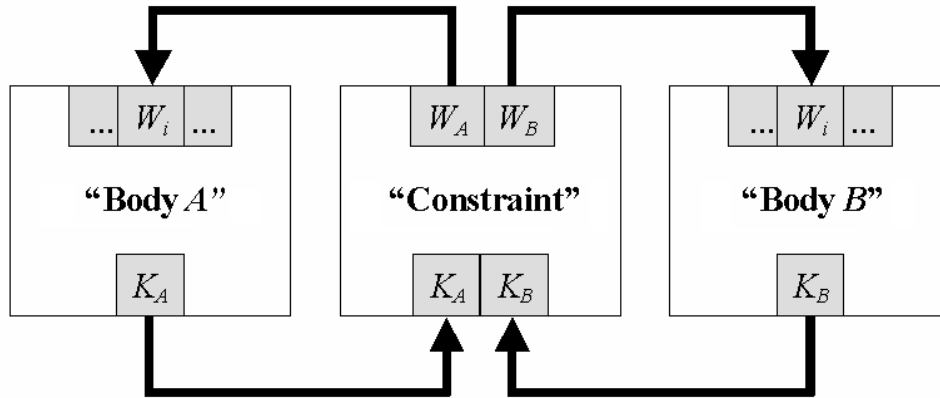


Рис. 2. Архитектура механической связи как коммуникационной сети.

Далее, поступая вышеописанным способом, мы можем ассоциировать объект класса **RigidBody** с 1-узлом, в то время как 0-узел ассоциируется с объектом класса **Constraint**. Таким образом, суперкласс нашей библиотеки, идентифицированный именем **RigidBody**, инкапсулирует динамику твердого тела, задаваемой при помощи дифференциальных уравнений Ньютона для центра масс тела и дифференциальных уравнений Эйлера для вращения вокруг него. Уравнения Эйлера конструируются с использованием алгебры кватернионов [10] следующим образом

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \circ (0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3), \quad I \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega}, I\boldsymbol{\Omega}] = \mathbf{N},$$

где первое уравнение – кинематическое, а второе – динамическое для описания динамики твердого тела. Кватернион $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T \in \mathbf{H} \cong \mathbf{R}^4$ однозначно определяет матрицу R поворота твердого тела. Алгебра кватернионов \mathbf{H} рассматривается как линейное пространство \mathbf{R}^4 , а бинарная операция \circ обозначает умножение кватернионов. Матрица тензора инерции I , вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T \in \mathbf{R}^3$ и вектор главного момента \mathbf{N} рассматриваются относительно главных центральных осей инерции тела. Таким образом, перед экспортированием кинематических данных из объекта класса **RigidBody** необходимо выполнить преобразование $\boldsymbol{\omega} = R\boldsymbol{\Omega}$. Аналогично главный момент после импортирования в объект класса **RigidBody** и перед использованием в секции поведения этого объекта должен быть преобразован $\mathbf{M} \mapsto \mathbf{N}$ в соответствии с формулой $\mathbf{N} = R^T \mathbf{M}$.

Если для разработки модели динамики системы тел используется концепция мультипорта, то наиболее трудной проблемой в процессе разработки представляется проектирование иерархии классов для объектов связи / контакта. Корневым в дереве такой иерархии является суперкласс **Constraint**. В соответствии с третьим законом динамики этот суперкласс в своей секции поведения должен содержать уравнения вида

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_B = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где векторы представляют собой реакции и моменты реакций, действующие «в направлении» тел A и B соответственно. Кинематические уравнения для связей различных типов должны добавляться к уравнениям системы (1) в соответствующих классах – наследниках, моделирующих конкретный тип механической связи. Для вывода таких уравнений рассмотрим, к примеру, локальную геометрию в задаче контактирования двух тел (Рис. 4).

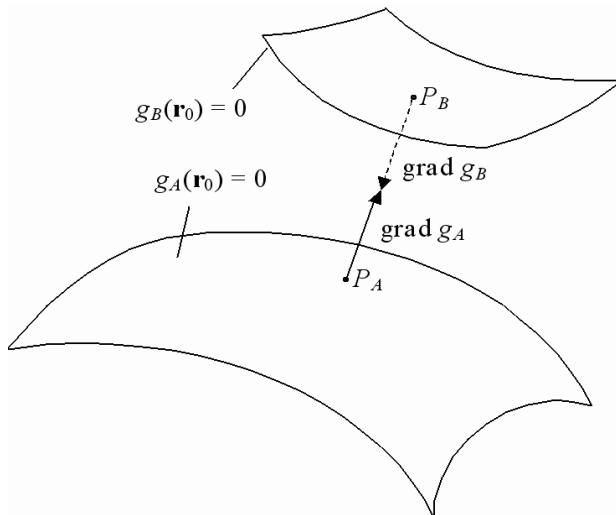


Рис. 4. Область окрестности контакта.

Базовое тело системы многих тел предполагается связанным с абсолютной системой координат $O_0x_0y_0z_0$ (AF), неподвижной в инерциальной системе отсчета (в нашем случае тело A является неподвижным основанием с горизонтальной плоскостью), система координат $O_\alpha x_\alpha y_\alpha z_\alpha$ отождествляется с системой отсчета BF_α , жестко связанной с телом $\alpha \in \{A, B\}$. Предполагается, что внешние поверхности тел задаются в их главных центральных осях при помощи уравнений $f_\alpha(\mathbf{r}_\alpha) = 0$ ($\alpha = A, B$) относительно соответствующей BF_α с осями, совпадающими с главными центральными осями инерции тела α . В абсолютной системе координат эти уравнения преобразуются к виду $g_\alpha(\mathbf{r}_0) = f_\alpha[(T_\alpha)^T(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{O_\alpha})] = 0$ ($\alpha = A, B$), где $\mathbf{r}_{O_\alpha} = O_0O_\alpha$, а T_α являются ортогональными матрица-

ми, задающими ориентацию BF_α относительно AF . Функции $g_\alpha(\mathbf{r}_0)$ зависят от времени косвенно, через переменные \mathbf{r}_{O_α} , T_α .

Объект связи в нашей модели должен в каждый текущий момент времени вычислять положения точек P_A и P_B , соответствующих ближайшим точкам взаимодействующих тел. В силу сделанных предположений такие точки должны вычисляться единственным образом. Обозначим символами \mathbf{r}_{P_A} , \mathbf{r}_{P_B} радиусы-векторы этих точек относительно инерциальной системы координат. Из простых геометрических соображений получим систему уравнений для координат упомянутых векторов

$$\begin{aligned} \text{grad } g_A(\mathbf{r}_{P_A}) &= \lambda \cdot \text{grad } g_B(\mathbf{r}_{P_B}), \\ \mathbf{r}_{P_A} - \mathbf{r}_{P_B} &= \mu \cdot \text{grad } g_B(\mathbf{r}_{P_B}), \\ g_A(\mathbf{r}_{P_A}) &= 0, \\ g_B(\mathbf{r}_{P_B}) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь первое условие – это условие коллинеарности нормалей к поверхностям в вычисляемых точках. Второе условие требует, чтобы точки располагались на прямой, коллинеарной нормалям. Легко убедиться, что градиенты могут быть вычислены по формулам

$$\text{grad } g_\alpha(\mathbf{r}_{P_\alpha}) = T_\alpha \text{ grad } f_\alpha \left[(T_\alpha)^T (\mathbf{r}_{P_\alpha} - \mathbf{r}_{O_\alpha}) \right] \quad (3)$$

Система (2) состоит из восьми скалярных уравнений относительно восьми скалярных переменных $x_{P_A}, y_{P_A}, z_{P_A}, x_{P_B}, y_{P_B}, z_{P_B}, \lambda, \mu$, где величины λ, μ являются вспомогательными переменными. Уравнения (2) можно использовать как в случае присутствия контакта тел, так и в случае его отсутствия. В первом случае вместо одного из уравнений поверхностей тел следует использовать уравнение $\mu = 0$.

Как показывает вычислительный опыт, на самом деле вместо алгебраических уравнений удобнее и надежнее пользоваться уравнениями связи в дифференциальной форме, что также часто применяется и в динамическом анализе механических систем. При этом связь вместо (2) задается при помощи системы дифференциально-алгебраических уравнений таких, что дифференциальная подсистема имеет вид

$$\frac{d\mathbf{r}_{P_A}}{dt} = \mathbf{v}_A, \quad \frac{d\mathbf{r}_{P_B}}{dt} = \mathbf{v}_B, \quad \frac{d\lambda}{dt} = v_\lambda, \quad \frac{d\mu}{dt} = v_\mu, \quad (4)$$

где переменные правых частей вычисляются неявно при помощи системы линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[\boldsymbol{\omega}_A, \text{grad } g_A \right] + T_A \text{Hess } f_A (T_A)^T (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_{P_A}) - \right. \\
& \left. \lambda \left\{ \left[\boldsymbol{\omega}_B, \text{grad } g_B \right] + T_B \text{Hess } f_B (T_B)^T (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_{P_B}) \right\} - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad v_\lambda \text{grad } g_B = \mathbf{0}, \\
& \left. \mu \left\{ \left[\boldsymbol{\omega}_B, \text{grad } g_B \right] + T_B \text{Hess } f_B (T_B)^T (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_{P_B}) \right\} - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad v_\mu \text{grad } g_B = \mathbf{0}, \\
& \text{grad } g_A \cdot \mathbf{v}_A - \text{grad } f_A (T_A)^T \mathbf{v}_{P_A} = 0, \\
& \text{grad } g_B \cdot \mathbf{v}_B - \text{grad } f_B (T_B)^T \mathbf{v}_{P_B} = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

При использовании последней, дифференциальной, формы связей в начале процесса моделирования необходимо позаботиться о совместимой системе начальных условий для переменных $\mathbf{r}_{P_A}, \mathbf{r}_{P_B}, \lambda, \mu$. В системе линейных алгебраических уравнений (5) векторы $\mathbf{v}_{P_A}, \mathbf{v}_{P_B}$ являются скоростями соответствующих материальных точек тел и вычисляются по формуле Эйлера

$$\mathbf{v}_{P_\alpha} = \mathbf{v}_{O_\alpha} + [\boldsymbol{\omega}_\alpha, \mathbf{r}_{P_\alpha} - \mathbf{r}_{O_\alpha}] \quad (\alpha = A, B). \tag{6}$$

Матрицы $\text{Hess } f_A, \text{Hess } f_B$ являются матрицами Гессе от соответствующих функций. В дальнейшем изложении важную роль будет играть вектор нормали

$$\mathbf{n}_A = \frac{\text{grad } g_A}{|\text{grad } g_A|}. \tag{7}$$

Нормаль к поверхности тела A взята здесь для определенности. С тем же успехом можно рассматривать вектор \mathbf{n}_B . Далее мы анализируем несколько динамических примеров механического контакта.

4. Случай контакта в точке

Точечный контакт двух твердых тел можно условно считать «простейшим» случаем процесса верификации моделей. Как уже упоминалось, для удовлетворения условий точечного контакта необходимо для уравнений (2) обеспечить выполнение условия $\mu = 0$ или условия $v_\mu = 0$ с начальным данным $\mu_0 = 0$ для системы уравнений (4), (5). Для простоты и определенности далее мы всегда предполагаем выполненным условие наличие контакта: либо по точке, либо по площадке.

При сделанных предположениях остаются две возможности реализации механического контакта: а) относительное скольжение тел (по их внешним поверхностям) в точке контакта, б) относительное качение тел в контактной точке. Рассмотрим последовательно эти случаи, уменьшая число степеней свободы для относительного движения в контакте. Силу, действующую на тело A со стороны тела B , обозначим символом \mathbf{F}_A , а на тело B – символом \mathbf{F}_B . Каждая из упомянутых сил действует в точке $P_\alpha, \alpha = A, B$. В

случае наличия контакта $P_A = P_B$. Введем вспомогательные обозначения $F_{An} = (\mathbf{F}_A, \mathbf{n}_A)$, $\mathbf{F}_{A\tau} = \mathbf{F}_A - F_{An}\mathbf{n}_A$,

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_{PA} - \mathbf{v}_{PB}, \quad v_{rn} = (\mathbf{v}_r, \mathbf{n}_A), \quad \mathbf{v}_{r\tau} = \mathbf{v}_r - v_{rn}\mathbf{n}_A. \quad (8)$$

Состояния относительных скольжения и качения различаются условиями в касательной плоскости. Предполагая для простоты при проскальзывании реализацию модели сухого трения, получаем векторное силовое уравнение в касательной плоскости

$$\mathbf{F}_{A\tau} - d \cdot F_{An} \frac{\mathbf{v}_{r\tau}}{|\mathbf{v}_{r\tau}|} - \kappa \mathbf{n}_A = \mathbf{0}, \quad (9)$$

где d – коэффициент трения скольжения. Таким образом, три скалярных уравнения системы (9) плюс уравнение $v_{rn} = 0$ составляют систему из четырех уравнений относительно четырех скаляров F_{Ax} , F_{Ay} , F_{Az} , κ . При качении же должна быть равна нулю касательная скорость $\mathbf{v}_{r\tau} - \kappa \mathbf{n}_A = \mathbf{0}$. Так что вместе с уравнением $v_{rn} = 0$ мы снова имеем четыре скалярных уравнения относительно тех же, что и выше, скалярных переменных.

Уравнение (9) хорошо «работает» в модели в случае скольжения, если относительная скорость тел в точке контакта не очень мала. Однако при переходе связи из состояния качения в состояние скольжения и обратно возникает проблема регуляризации уравнения связи (9). Оказывается, здесь можно применить известную аппроксимацию сухого трения регуляризованным выражением для касательной силы

$$\mathbf{F}_{A\tau} - \kappa \mathbf{n}_A = \begin{cases} d \cdot F_{An} \mathbf{v}_{r\tau} / |\mathbf{v}_{r\tau}| & \text{при } |\mathbf{v}_{r\tau}| > \delta, \\ d \cdot F_{An} \mathbf{v}_{r\tau} / \delta & \text{при } |\mathbf{v}_{r\tau}| \leq \delta, \end{cases}$$

где предполагается, что $\delta \ll 1$.

Известно [11], что в этом случае решение приближенной задачи остается близким к решению регуляризованной на асимптотически больших временах. Реализация и моделирование показали, что эта близость выполняется с очень высокой степенью точности. Данный подход полностью решает проблему моделирования переходов между состояниями скольжения и качения. Описанный подход полностью разрешает проблему точного моделирования переходов между состояниями скольжения и качения.

4.1. Пример А. П. Маркеева

Рассмотрим поступательно-вращательное движение однородного твердого тела эллипсоидальной формы на шероховатой плоскости [12]. Трение предполагается кулоновским с небольшим коэффициентом. Тело в начальный момент положено на точку конца наименьшей полуоси эллипсоида и достаточно быстро закручено вокруг оси, близкой к вертикальной. В этом случае нетрудно повторить эксперимент, качественно

описанный А. П. Маркеевым, когда за конечное время тело «становится» на свою наибольшую полуось.

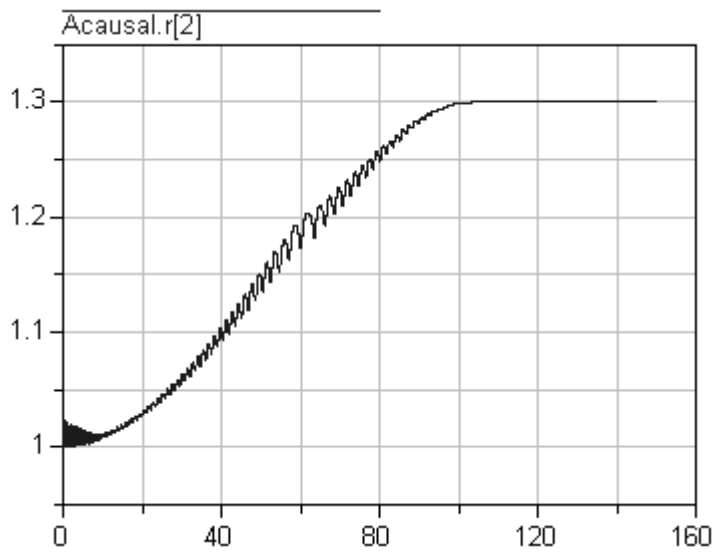


Рис. 5. Высота центра масс.

В данном примере полуоси тела не слишком отличаются друг от друга: $a_1 = 1,2$; $b_1 = 1$, $c_1 = 1,3$. Оси симметрии эллипсоидальной поверхности совпадают с главными центральными осями инерции тела. Выбирая начальные данные в виде $\mathbf{r}(0) = (0; 1; 0)^T$, $\mathbf{v}(0) = (0,05; 0; 0)^T$, $\mathbf{q}(0) = (1; 0; 0; 0)^T$, $\boldsymbol{\omega}(0) = (0; -10; 2)^T$ получаем упомянутый выше эффект: центр масс эллипсоида постепенно поднимается (Рис. 5) с высоты малой полуоси на высоту большой. При этом в инерциальной системе координат угловая скорость почти не меняет своего направления (Рис. 6, нижняя кривая). В то же время, в начале движения вектор угловой скорости направлен вдоль меньшей полуоси тела (средняя кривая), а в конце движения – вдоль его большей полуоси (верхняя кривая).

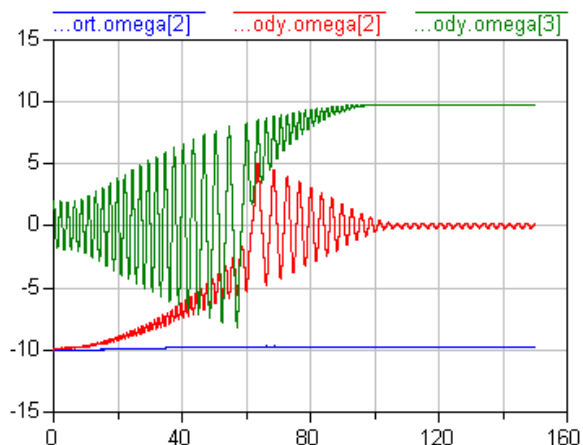


Рис. 6. Проекция угловой скорости.

4.1. Пример кельтского камня

Далее рассмотрим модель — качение кельтского камня по неподвижной горизонтальной плоскости [13]. В этом случае базовое тело неподвижно и совпадает с телом A (Рис. 2). Для описания его динамики дифференциальные уравнения не требуются. Все кинематические характеристики — нулевые векторы. Матрица поворота T_0 — единичная. Роль тела B в рассмотренной выше схеме связи играет кельтский камень.

Под кельтским камнем обычно подразумевают твердое тело, имеющее форму внешней поверхности в виде параболоида или эллипсоида, у которого главные центральные оси инерции не совпадают с осями симметрии соответствующей поверхности второго порядка. Рассмотрим для определенности случай эллипсоидальной поверхности (Рис. 7). Фиксируем значения главных центральных моментов инерции тела $I_{11} = 2$, $I_{22} = 3$, $I_{33} = 1$, а также его массу $m = 1$. Также для определенности можно считать, что все физические параметры заданы, например, в системе единиц СИ.

Теперь рассмотрим неголономную связь. Функция f_A имеет вид $f_A(x_0, y_0, z_0) \equiv y_0$. Поэтому $\text{grad} f_A = (0, 1, 0)^T$. Поверхность тела B имеет форму эллипсоида с полуосями $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, $c_1 = 3$. Матрица соответствующей квадратичной формы в главных осях этого эллипсоида имеет вид $B_1 = \text{diag}(a_1^{-2}, b_1^{-2}, c_1^{-2})$.

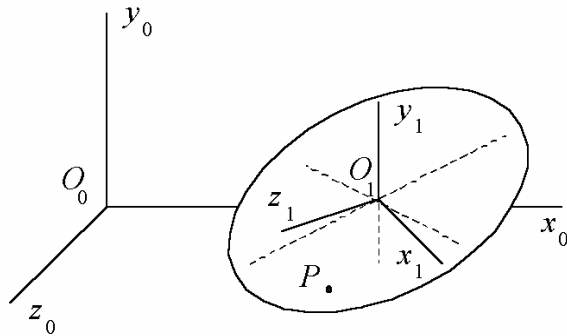


Рис. 7. Кельтский камень на плоскости.

Считая, что вторые главные оси эллипсоидов (вдоль оси O_1y_1) инерции и формы направлены одинаково, повернем второй эллипсоид относительно первого вокруг этого направления на угол $\delta = \pi/10$. Тогда матрица квадратичной формы эллипсоида качения в главных центральных осях инерции будет иметь вид

$$B = RB_1R^T, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \delta & 0 & \sin \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \delta & 0 & \cos \delta \end{pmatrix}.$$

Описанная выше модель была разработана на языке Modelica с использованием библиотеки классов для моделирования трехмерной динамики систем тел. Высокое качество аппроксимации движений кельтского камня было продемонстрировано в ряде примеров прогона модели. В частности, были выполнены вычисления, соответствующие случаю Кейна и Левинсона [14]. Результаты моделирования для данного случая показали совпадение с оригиналами авторов в мельчайших деталях.

5. Случай контакта по площадке

Зачастую, модель точечного контакта не может объяснить динамических эффектов, возникающих при взаимодействии упругих тел. Если же мы вместо точки рассмотрим модель с контактной площадкой, то для этого необходимо ввести подходящую модель податливости при контактировании. Существует множество всевозможных моделей упругого контакта. Модель Герца – одна из наиболее популярных в инженерной практике [15]. Эта модель обеспечивает надежную процедуру вычисления нормальной упругой силы для взаимодействия двух твердых тел.

Локальная геометрическая редукция в окрестности контакта аналогична описанной выше для точечного случая. Единственное отличие от этого случая – отсутствие ограничения вида $\square = 0$. Для случая контактной площадки должно перманентно выполняться условие $\square \leq 0$. Мы также предполагаем, что взаимодействующие тела A и B не создают геометрических препятствий для их относительного движения – только возникновение упругой силы должно приводить их в состояние механического столкновения. Если трехмерные области, ограниченные внешними поверхностями тел, не пересекаются, то объект контакта генерирует нулевой силовой мотор в направлении каждого из тел. Одновременно этот объект должен генерировать радиусы векторы $\mathbf{r}_{P_A}, \mathbf{r}_{P_B}$ оппозитных точек P_A, P_B (Рис. 4). В работе [16] можно найти детальное описание геометрической редукции и вычислительной реализации модели Герца и её объеметрической модификации, предложенной В. Г. Вильке.

Ключевой проблемой всего алгоритма является вычисление решения (нормальной силы упругости F и квадраты полуосей α, β эллиптической контактной площадки) системы трансцендентных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{FD}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{(\alpha + \xi)(\beta + \xi)}\xi} &= h, \\ \frac{FD}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(\alpha + \xi)\sqrt{(\alpha + \xi)(\beta + \xi)}\xi} &= P, \\ \frac{FD}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(\beta + \xi)\sqrt{(\alpha + \xi)(\beta + \xi)}\xi} &= Q, \end{aligned} \quad (10)$$

где заданными считаются три величины: $h > 0$ – глубина взаимного проникания тел, $P, Q > 0$ – коэффициенты канонической квадратичной формы относительной поверхности, полученной вычитанием локальных представлений контактирующих (недеформированных) поверхностей.

Наличие эллиптической контактной площадки в задаче Герца приводит к новым эффектам в поведении касательных сил (трения). К простейшим в касательной плоскости можно отнести модель Контенсу – Эрисмана [17, 18]. Детали компьютерной реализации этой модели можно найти в [19]. Одним из ключевых свойств модели является применение кусочно-линейных непрерывных аппроксимаций компонент силового мотора для сил трения на площадке эллиптической формы. В силу своей простоты эта аппроксимация работает быстро, а верификация модели с использованием китайского волчка в качестве примера показала хорошую точность модели.

В отличие от предыдущих рассмотрений мы конструируем здесь так называемую неограниченную контактную задачу. Последнее означает, что мы не применяем каких-либо предположений о форме контактной площадки и о вычислении нормальной упругой силы. Такой подход для инженерных приложений, где желательно иметь вычислительную процедуру общего вида. Таким образом, мы динамически вычисляем размеры и положение контактной площадки, нормальную упругую силу с использованием модели Герца и одновременно (с учетом динамически вычисленной площадки) вычисляется силовой мотор сил трения.

5.1. Пример китайского волчка

Верификация представленной здесь модели касательных сил проводилась в два этапа: а) для случая кругового контакта; б) для случая некругового эллиптического контакта. В первом случае рассмотрена динамическая модель известного волчка тип-топ. Все параметры, определяющие эту механическую систему, совпадают с данными, представленными для этого примера в статье [20], авторы которой, в свою очередь, взяли эти параметры из более ранней работы [21].

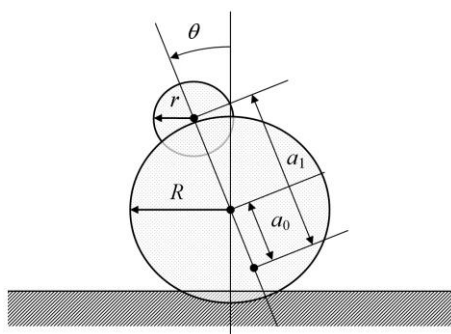


Рис. 8. Геометрические параметры волчка.

Геометрически «твердое» тело волчка состоит из двух шаров (Рис. 8): большего, радиусом $R = 1,5 \cdot 10^{-2}$ м, и меньшего, радиусом $r = 0,5 \cdot 10^{-2}$ м. Центр масс всего волчка считается расположенным «под» центром большего шара на оси симметрии на расстоянии $a_0 = 3 \cdot 10^{-3}$ м и на расстоянии $a_1 = 16 \cdot 10^{-3}$ м от центра меньшего шара. Масса волчка равна $m = 6 \cdot 10^{-3}$ кг. Главные центральные моменты инерции таковы (тело предполагается динамически симметричным): экваториальный момент инерции составляет $8 \cdot 10^{-7}$ кг·м², а полярный – $7 \cdot 10^{-7}$ кг·м². Материал, из которого изготовлен волчок и горизонтальный пол, по которому он катится, предполагается деревом с модулем упругости Юнга $E = 9,1 \cdot 10^9$ Н/м², что соответствует (при значениях коэффициентов Пуассона в 0,3) эффективному модулю упругости $E^* = 5 \cdot 10^9$ Н/м². Коэффициент трения скольжения предполагается равным $f = 0,3$.

В начальный момент времени центр масс волчка считается неподвижным, а сам волчок (точнее – его больший шар) никак не вдавлен в упругую горизонтальную поверхность. Меньший шар расположен в верхней полусфере шара большего, а начальный угол наклона оси симметрии волчка составляет $\theta_0 = 0,1$ рад. Начальная угловая скорость также в точности совпадает с данными работы [20], равна $\omega_0 = 180$ с⁻¹ и направлена вдоль оси динамической симметрии.

Заметим, что в работе [20] контактная задача интерпретируется в ограниченном смысле: площадка контакта считается заданной, и в этом предположении вычисляются вектор силы трения и момент трения вращения. Причем, радиус контактной площадки считается неизменным и одинаковым для обоих шаров волчка. Именно, круговой контакт вычисляется для случая статического равновесия упругой силы со стороны плоскости и силы тяжести волчка. На самом же деле, в процессе движения сила нормальной реакции, реализуемой здесь при помощи силы упругости, меняется. Следовательно, меняется и площадка (радиус) пятна контакта. Так что волчок должен испытывать также вертикальные упругие микровибрации. При этом, как можно видеть из изложенного выше, в упрощенной модели, будет меняться момент трения вращения, что, в общем случае, может отразиться на движении волчка.

В модели, построенной в данной работе, рассматривается неограниченная контактная задача: упругая нормальная сила вычисляется из модели Герца (либо из модели В. Г. Вильке) с добавлением (нелинейного) вязкого слагаемого. Одновременно вычисляется эллиптическое пятно контакта, и эти данные используются для расчета касательной силы и момента трения вращения в рамках упрощенной модели Контенсу.

Замечательным образом, вычислительный эксперимент показал, что сценарий перевертывания волчка с «ног» (опора на больший шар) на «голову» (опора на меньший

шар), полученный в [20] при помощи совершенно иной вычислительной модели с высокой точностью воспроизводится и у нас. График Рис. 9 хорошо иллюстрирует этот процесс: так же, как и в [20] на нем представлена эволюция угла наклона $\theta(t)$. Сравнение этого графика с соответствующим участком эволюции угла наклона в [20] подтверждает их полную идентичность. Единственное отличие состоит в наличии на Рис. 9 дополнительного «дрожания», что свидетельствует о высокочастотной составляющей в динамике упругого контакта волчка и плоскости. Аналогичную идентичность показывают и кривые индикаторов контактов шаров, из которых составлен волчок, с плоскостью (Рис. 10). Индикатор контакта большого шара представлен сплошной линией, а малого – штриховой линией.

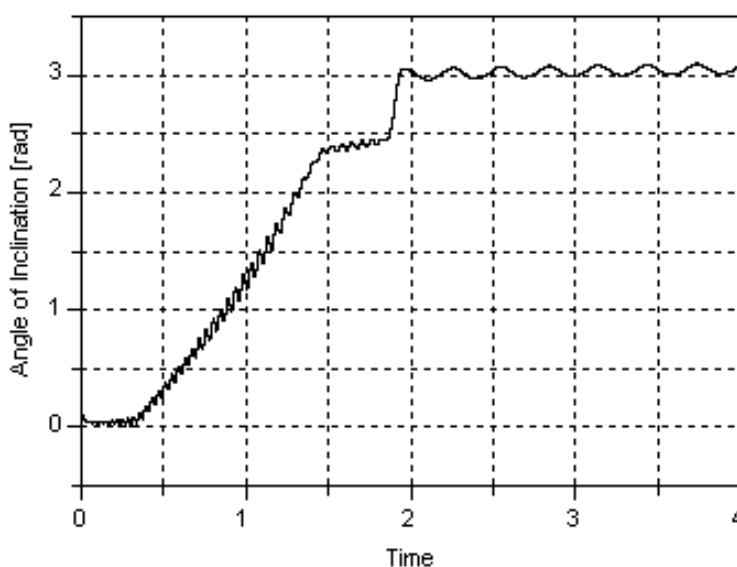


Рис. 9. Эволюция оси симметрии волчка.

Помимо описанной была также проведена верификация при помощи результатов работы [22]. Именно, формулы для силы трения и момента трения вращения, полученные в [22] (случай а)) были применены в компьютерной модели динамики волчка, построенной на языке Modelica в варианте неограниченной контактной задачи. В рамках той же компьютерной модели была реализована описываемая здесь упрощенная модель Контенсу (случай б)) и модель, использующая дробно-линейную аппроксимацию Паде для сил и момента трения (случай в)). Результаты эволюции угла наклона показаны на Рис. 11. При этом случаю а) соответствует сплошная кривая, случаю б) – штрихованная линия, случаю в) – пунктир. Легко видеть, что сценарии переворота волчка ближе всего друг к другу в случаях а) и б).

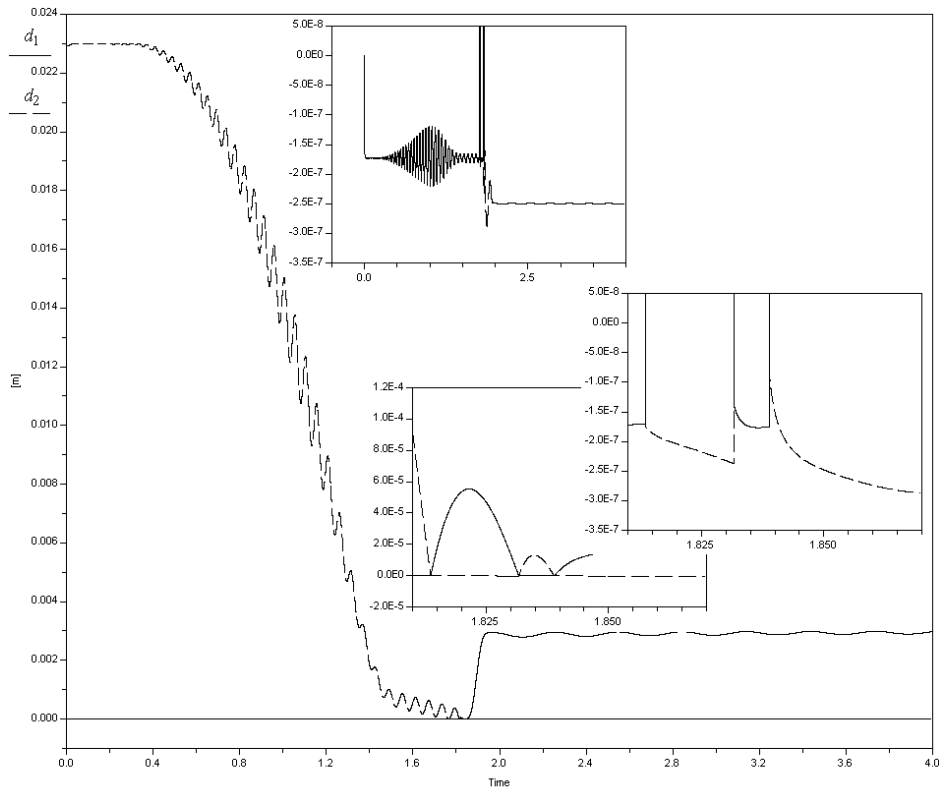


Рис. 10. Эволюция индикаторов контакта. Интервал переворота увеличен.

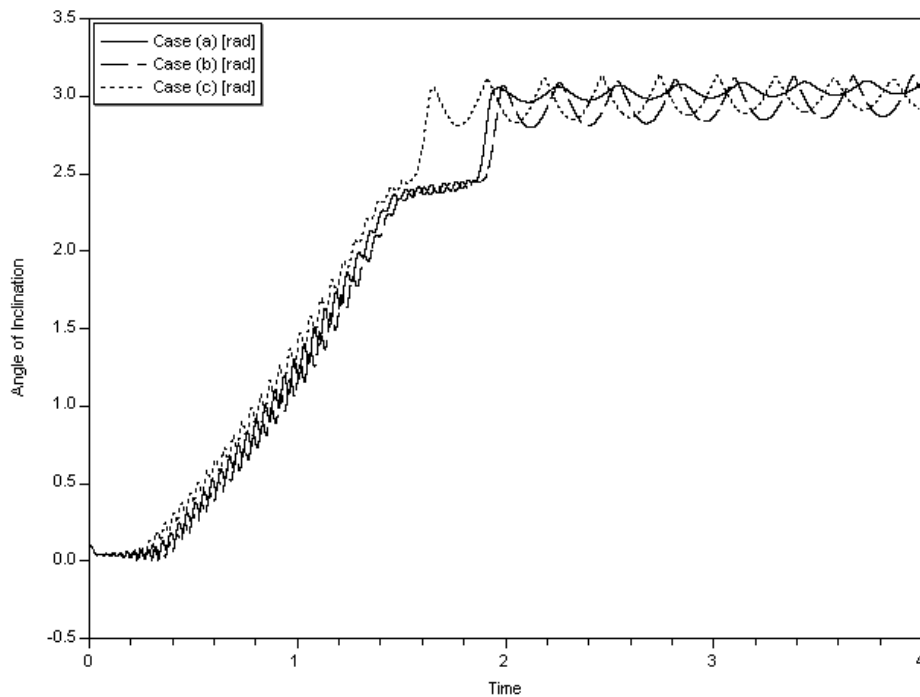


Рис. 11. Сравнительный анализ трех моделей.

Заметим, что поведение, характерное для волчка тип-топ (переворот «на голову») можно легко получить и в рамках модели «регуляризованного» трения Кулона. Регуляризацию при этом следует понимать в смысле, предложенном в работах [11, 23] и ис-

пользовавшемся в случае точечного контакта в [9], «наклоняя» график зависимости силы трения от скорости в окрестности нуля так, чтобы заменить этим наклоном разрыв первого рода в нуле. Чем более пологим является наклон, тем скорее обнаруживается динамический эффект переворота волчка. Как показывает приближенная модель Контенсу, именно этот наклон появляется в соответствующем графике зависимости силы трения от скорости в рамках уже точной модели Контенсу – Эрисмана.

5.2. Пример шарикового подшипника

На втором этапе верификации, в случае существенно эллиптической контактной площадки, рассматривалась, как и в работе [19], динамическая модель шарикоподшипника. При этом сравнивались два подхода: а) стандартная модель нормальной силы Герца плюс упрощенная модель сил трения Контенсу; б) упрощенная модель нормальной силы В. Г. Вильке плюс упрощенная модель сил трения Контенсу. Как и в работе [19], динамические модели случаев а) и б) мало отличаются друг от друга. При этом модель б) демонстрирует бóльшую (на 20\%) производительность. В качестве иллюстрации сравнивается одна из составляющих касательной силы трения в контакте между одним из шариков подшипника и его внутренним кольцом. Вычислявшиеся в процессе моделирования значения квадрата эксцентриситета контактной площадки в этом примере оказались постоянными по времени и равными 0,687 в случае а) и 0,643 – в случае б).

6. Выводы

Подводя краткие итоги рассмотренным в работе результатам можно отметить следующие выводы:

1. Возможно достаточно простое представление динамики систем тел при помощи унифицированного мультибондграфа, имеющего каноническую структуру узлов (для которой существуют стандартные процедуры назначения причинности в бондграфе).

2. Представление модели механической связи в виде мультибондграфа Рис. 1 может служить основой для построения совместной системы дифференциально-алгебраических уравнений, задающих «поведение» связи, а сама схема Рис. 1 может использоваться в менее формальном объектно-ориентированном подходе.

3. Объектно-ориентированное представление позволяет строить модели механических связей разнообразных типов быстро и эффективно реализуя бондграфовые конструкции более естественными методами так, что цепочки наследования свойств и поведения постепенно заполняют формальное описание модели.

4. Аказуальное моделирование ускоряет разработку моделей, освобождая разработчика от задачи назначения причинности, если он/она следует определенным правилам таким, как правила дополнительности.

5. Оказалось, что применение для алгоритма отслеживания контакта системы дифференциально-алгебраических уравнений улучшает надежность модели при сохранении её точности. Для реализации алгоритма отслеживания в случае сложно устроенных поверхностей контакта достаточно в цепи наследования классов лишь заменять «крайние» классы – наследники, описывая уравнения поверхностей при помощи условных конструкций языка моделирования.

6. Алгоритм В. Г. Вильке оказался более надежным и подходящим для широкого диапазона эксцентриситета контактной площадки, одновременно обеспечивая по отношению к модели Герца точность в 0.5%.

7. Эффект переворота волчка тип-топ «на голову» полностью обусловлен «регуляризацией» силы сухого трения, обеспечиваемой моделью Контенсу – Эрисмана, в окрестности нулевой скорости проскальзывания. Вычислительные эксперименты показали, что если в модели Кулона наклон «регуляризованной» силы трения в окрестности нуля достаточно велик, то эффект «тип-топ» либо не наблюдается совсем, либо, кратковременно реализуясь в течение долгого времени эволюции движения, быстро исчезает. И только заметное уменьшение упомянутого наклона немедленно приводит к перевороту волчка «на голову» с дальнейшей длительной прецессией в этом положении. Именно такое свойство силы трения и дает модель Контенсу – Эрисмана. При этом роль момента трения верчения сводится к диссипативному эффекту последующего постепенного «падения» волчка, приближающего его к статически устойчивой конфигурации.

8. Поскольку полные эллиптические интегралы, используемые в упрощенной модели Контенсу, фактически уже найдены в рамках алгоритма Герца для расчета нормальной силы, то с вычислительной точки зрения применение этой модели практически ничего «не стоит». Если же еще учесть эффект регуляризации, доставляемый моделью Контенсу – Эрисмана, то мы приходим к неожиданному, на первый взгляд, результату: численное моделирование динамики контактного взаимодействия при помощи моделей Герца (нормальная сила) и Контенсу – Эрисмана (касательная сила и момент трения верчения) оказывается на 20 – 30% быстрее, чем комбинирование моделей Герца и «простого» сухого трения Кулона. Замедление счета при использовании модели связано, конечно же, с большой жесткостью задачи в этом последнем случае.

9. Хотя для изотропного случая контактирования средние значения касательных сил моделей Кулона и Контенсу – Эрисмана не слишком сильно различаются, однако в

анизотропном случае первая модель становится неадекватной, в то время как вторая продолжает обеспечивать «правильное» моделирование процесса контактирования. Это свойство становится важным, например, в случае симуляции шариковых подшипников, в которых контактные площадки имеют заметно вытянутую эллиптическую форму.

Список литературы

1. Paynter H. M. Analysis and design of engineering systems. — The M. I. T. Press, 1961.
2. Stramigioli S., Blankenstein G., Duindam V., Bruyninckx H., Melchiorri C. Power port concepts in robotics. The Geometrical-Physical Approach. Tutorial at 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation. — IEEE, 2003.
3. Косенко И. И. Графовые представления моделей динамики систем тел // Математическое моделирование. — 2009. — Т. 21. № 9. — С. 80–88.
4. Cellier F. E. Continuous System Modeling. — Springer-Verlag, 1991.
5. Mukherjee A., Karmakar R. Modelling and Simulation of Engineering Systems through Bondgraphs. — Alpha Science International Ltd., 2000.
6. Golo G. Interconnection structures in port-based modelling: Tools for Analysis and Simulation. PhD Thesis. — University of Twente, Enschede, The Netherlands, 2002.
7. Fritzson P. Principles of object-oriented modeling and simulation with Modelica 2.1. — IEEE Press, 2004.
8. Косенко И. И., Ставровская М. С. Динамика кельтского камня в среде компьютерного моделирования Dymola. // Мобильные роботы и мехатронные системы: Материалы научной школы-конференции (Москва, 5–6 апреля 2004). — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. — С. 95–109.
9. Косенко И. И. Реализация компьютерной модели динамики систем твердых тел с освобождающими связями // Математическое моделирование. — 2006. — Т. 18. № 2. — С. 95–106.
10. Косенко И. И. Интегрирование уравнений вращательного движения твердого тела в алгебре кватернионов. Случай Эйлера. // ПММ. — 1998. — Т. 62. Вып. 2. — С. 206–214.
11. Новожилов И. В. Фракционный анализ. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1995. — 224 с.
12. Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. — М.: Наука, 1992. — 336 с..

13. Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней. // В сб.: Борисов А. В., Мамаев И. С. (ред.) Неголономные динамические системы. Интегрируемость, хаос, странные аттракторы. / Сборник статей. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. — С. 296–320.
14. Kane T. R., Levinson D. A., Realistic mathematical modeling of the rattleback. // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. — 1982. — Vol. 17, Iss. 3. — P. 175–186.
15. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper. // *J. reine und angewandte Mathematik*. — 1882. — B. 92. — S. 156–171.
16. Vil'ke V. G., Kosenko I. I., Aleksandrov E. B. On computer implementation of the Hertz elastic contact model and its simplifications. // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2009. — Vol. 14. — P. 693–714.
17. Contensou P. Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans la théorie de la toupie. // *Kreiselprobleme Gyrodynamics: IUTAM Symposium Celerina*, 1962. — Springer, 1963. — P. 201–216.
18. Erismann Th. Theorie und Anwendungen des echten Kugelgetriebes. // *Z. angew. Math. Phys.*. — 1954. — Vol. 5. — P. 355–388.
19. Kosenko I. I., Aleksandrov E. B. Implementation of the Contensou–Erismann tangent forces model in the Hertz contact problem. // *Multibody System Dynamics*. — 2010. — Vol. 24. — P. 281–301.
20. Leine R. I. and Glocker Ch. A set-valued force law for spatial Coulomb – Contensou friction. // *European Journal of Mechanics A/Solids*. — 2003. — Vol. 22. — P. 193–216.
21. Friedl C. Der Stehaufkreisel. Master's thesis. // *Institut für Physik, Universität Augsburg*, 1997.
22. Zhuravlev V. F. The model of dry friction in the problem of the rolling of rigid bodies. // *J. Appl. Math. Mech.*. — 1998. — Vol. 62. — P. 705–710.
23. Rooney G. T. and Deravi P. Coulomb friction in mechanism sliding joints. // *Mechanism and Machine Theory*. — 1982. — Vol. 17. — P. 207–211.