

УДК 004.9:539.17

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ
С ВИХРЕВЫМИ СТРУКТУРАМИ В ГАЗЕ.****Лебо И. Г.**, д.ф.-м.н., профессор, E-mail: lebo@mirea.ru**Акжолов М. Ж.**, к.ф.-м.н., доцент, E-mail: ak-1@mail.ru

МГТУ МИРЭА, Москва, Россия

Аннотация. С помощью методов математического моделирования изучаются особенности взаимодействия вихревых структур с проходящей ударной волной в газе. Показано, что волна не разрушает вихрь, а переносит его с потоком, причем ротор скорости возрастает за фронтом ударной волны в процессе сжатия газа. При наличии нескольких вихрей формируются новые структуры. Ротор скорости также возрастает даже в случае первоначально разнонаправленных вихрей. Обсуждается возможность соответствующих экспериментов.

Ключевые слова. Численное моделирование; ударная волна, вихрь.

**THE MODELING OF SHOCK WAVE INTERACTION
WITH THE WHIRLS IN GASES.****Lebo I.G.**, D.ofSci., Prof., E-mail: lebo@mirea.ru,**Akjolov M.J.**, PhD., assist. Prof., E-mail: ak-1@mail.ru,

MSTU MIREA, Moscow, Russia

Abstract. With help of the mathematical modeling methods we have studied the particularities of the interaction of passing shock wave with the vortexes in gas. It is shown, the shock does not destroy the whirl and moves it with stream. The velocity curl is growing, as the result of gas compression behind the shock front. The new structures are formed and curl is growing too, if shock interacts with a few whirls.

Keywords. Numerical simulation, shock wave, whirl.

Введение.

В современной газовой динамике изучаются особенности формирования и развития турбулентных сверхзвуковых течений. Такие задачи возникают при изучении вхождения космических объектов в плотные слои атмосферы Земли, при развитии газодинамических неустойчивостей вблизи контактной поверхности двух сред, движущихся ускорено, а также в исследованиях по инерциальному термоядерному синтезу. Наряду с прикладными исследованиями, задача о взаимодействии ударной волны с вихрем носит фундаментальный характер. Такие задачи, как правило, не имеют аналитических решений и требуют развития весьма сложных математических моделей. Для решения такой задачи применяются методы математического моделирования [1]. Ниже представлены результаты исследования особенностей взаимодействия ударной волны с одиночными вихрями и их комбинациями.

1. Физико-математическая модель.

Газодинамические процессы описываются с помощью системы уравнений Навье-Стокса с учетом теплопроводности (1):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \\
 & \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \\
 & \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u E}{\partial x} + \frac{\partial \rho v E}{\partial y} + \frac{\partial (p u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \rho g_0 v = \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) u + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) v + \mu \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + B \cdot J) \right\} + \\
 & \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) u + \mu \frac{\partial}{\partial y} (v^2 + B \cdot J) \right\} + \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \kappa T \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \kappa T \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $\vec{V} = (u, v)$ - вектор скорости, J - удельная внутренняя энергия, E - полная удельная энергия, ρ - плотность газа, κT - коэффициент теплопроводности, A, B - коэффициенты вязкости.

Для идеального газа

$$A = -2/3, B = \frac{\chi^2}{C_p}, \chi = \frac{\kappa T}{C_v \cdot \rho} - \text{температуропроводность, } C_v, C_p - \text{теплоемкости при}$$

постоянном объеме и постоянном давлении газа, g_0 - ускорение свободного падения, направленное строго вдоль оси OY.

Система уравнений (1) замыкается уравнением состояния (2).

$$p = (\gamma - 1)\rho J = (\gamma - 1)\rho[E - (u^2 + v^2)/2] \tag{2}$$

γ - показатель адиабаты, p - давление.

Для решения уравнений (1-2) использовалась двумерная программа "ENS" (equations of Navies-Stocks) [2], разработанная на основе метода крупных частиц [3]. В

представленных ниже расчетах теплопроводность и влияние поля тяжести не учитывались, то есть $\chi=0$ и $g_0=0$. Ударная волна задавалась с помощью соотношений Гюгонио [4-5] (в [5] в формуле (5.15) опечатка. Правильная формула – в настоящей статье).

2. Постановки задач.

На рис.1 схематично показана постановка задачи. Ударная волна движется снизу-вверх по газу в области $0 < x < L_x$, $0 < y < L_y$. Ударная волна задается с помощью соотношений Гюгонио в области $0 < y < b_0$. Эти соотношения получены из законов сохранения потоков массы, импульса и энергии в подвижной системе координат на фронте ударной волны.

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 \frac{2\gamma \cdot M_x^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}, ZP = \frac{P_1}{P_0}; \\ C_s^2 &= \gamma \frac{P_0}{\rho_0}; D = M_x \cdot C_s; \\ \rho_1 &= \rho_0 \frac{\gamma + 1 + (\gamma - 1)/ZP}{\gamma - 1 + (\gamma + 1)/ZP}; \\ u_1^2 &= \left(\gamma \frac{P_1}{\rho_1}\right) \frac{\gamma - 1 + (\gamma + 1)/ZP}{2\gamma}; \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $P_{1(0)}$, $\rho_{1(0)}$ - давление и плотность за фронтом (перед фронтом) ударной волны, γ – показатель адиабаты, C_s - скорость звука, D – скорость движения фронта ударной волны в лабораторной системе отсчета. Достаточно задать число Маха (M_x) и термодинамические параметры газа перед фронтом ударной волны, чтобы определить соответствующие параметры за фронтом. Скорость движения газа за фронтом ударной волны (\vec{V}) в лабораторной системе отсчета будет определяться по формуле $V_y = v = D - u_1$. Моделировалось распространение ударной волны в инертном газе – аргоне, поэтому показатель адиабаты $\gamma = 5/3$, начальное давление $P_0 = 0,5$ атм, плотность $\rho_0 = 0.802$ мг/см³, число Маха $M_x = 3.5$.

Задачи 1,2 (взаимодействие ударной волны с уединенным вихрем)

В точке (x_c, y_c) находится центр вихря, который задается в начальный момент времени следующим образом:

$$V_x = \begin{cases} (y - y_c) \omega_0, & r \leq R_0 \\ (y - y_c) \omega_0 / \exp\left(\frac{r - R_0}{R_0}\right)^4, & r > R_0 \end{cases}$$

$$V_y = \begin{cases} \omega(x - x_c) \frac{R_0^2 - r^2}{R_0^2}, & r \leq R_0 \\ \omega \frac{R_0^4 - r^4}{R_0^4}, & r > R_0 \end{cases} \quad (4)$$

$$r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}, \quad y_c = b_1, \quad V_x = u, \quad V_y = v.$$

Чтобы сгладить края вихря при $r > R_0$ задавалось быстрое «экспоненциальное» убывание скорости. Параметры задачи R_0, b_1, ω – варьировались в расчетах.

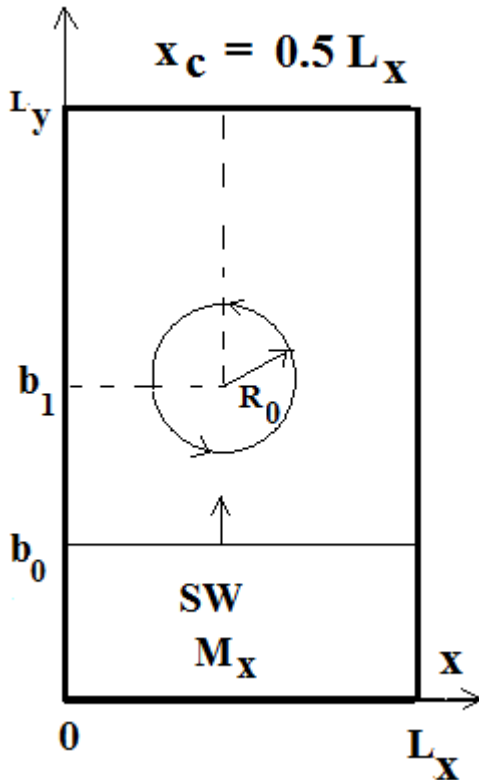


Рис.1. Расчетная область и начальное расположение ударной волны (SW) и вихря.

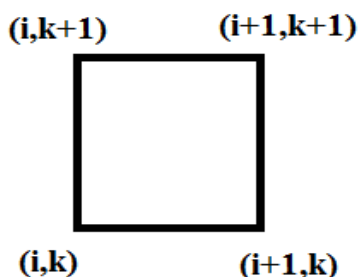
В программе наряду с термодинамическими переменными и скоростями (в частности,

$$\text{в каждой расчетной ячейке, согласно теореме Стокса, } \oint (\vec{V} \cdot d\vec{l}) = \iint (\text{rot} \vec{V} \cdot \vec{n}) ds.$$

Значения сеточной функции скорости $\vec{V} = (u, v, 0)$ заданы в вершинах сеточной ячейки, поэтому можно вычислить $(\text{rot} V)_{ik} = \text{curl}(i, k)$ в центре каждой ячейки (смотри рис.2).

абсолютное значение скорости $(V^r = \sqrt{u^2 + v^2})$, вычислялся и ротор скорости $\text{rot} V$.

Значения сеточной функции скорости $\vec{V} = (u, v, 0)$ заданы в вершинах сеточной ячейки, поэтому можно вычислить $(\text{rot} V)_{ik} = \text{curl}(i, k)$ в центре каждой ячейки (смотри рис.2).

Рис.2. Счетная ячейка (i, k) .

Значения $curl(i, k)$ рассчитываются следующим образом:

$$curl(i, k) \Delta x \Delta y = 0.5(u_{i,k} + u_{i+1,k}) \Delta x + 0.5(v_{i+1,k+1} + v_{i+1,k}) \Delta y - \\ - 0.5(u_{i,k+1} + u_{i+1,k+1}) \Delta x - 0.5(v_{i,k} + v_{i,k+1}) \Delta y$$

Откуда получаем массив данных:

$$curl(i, k) = 0.5(u_{i,k} + u_{i+1,k}) \Delta x + 0.5(v_{i+1,k+1} + v_{i+1,k}) \Delta y - \\ - (u_{i,k+1} + u_{i+1,k+1}) \Delta x - (v_{i,k} + v_{i,k+1}) \Delta y / (\Delta x \Delta y),$$

(5)

как функцию координат (x, y) .

В первой серии расчетов изучалось взаимодействие ударной волны с вихрем без учета (задача 1) и с учетом вязкости (задача 2). В первом расчете $A=B=0$, $\mu=0$, а во втором $\mu=5 \cdot 10^{-4}$ дин·с/см², $C_p=3.09 \cdot 10^6$ эрг/град·с, - теплоемкость, (A и B определены выше).

Во второй серии расчетов (задачи 3а, б) изучались взаимодействия вихрей, переносимых потоком газа.

Постановка задач показана ниже:

Задача 3а (взаимодействие двух вертикальных вихрей, имеющих противоположные направления)

Первый вихрь:

$$V_x = \begin{cases} -(y - y_{cl}) \omega, & r \leq R_0 \\ -(y - y_{cl}) \omega / \exp\left(\frac{r - R_0}{R_0}\right)^4, & r > R_0 \end{cases} \quad V_y = \begin{cases} +(x - x_c) \omega, & r \leq R_0 \\ (x - x_c) \omega / \exp\left(\frac{r - R_0}{R_0}\right)^4, & r > R_0 \end{cases}$$

Второй вихрь:

$$V_x = \begin{cases} + (y - y_{c2}) \omega, & r \leq R_0 \\ + (y - y_{c2}) \omega / \exp\left(\frac{r - R_0}{R_0}\right)^4, & r > R_0 \end{cases} \quad V_y = \begin{cases} - (x - x_c) \omega, & r \leq R_0 \\ - (x - x_c) \omega / \exp\left(\frac{r - R_0}{R_0}\right)^4, & r > R_0 \end{cases}$$

$$r_2 = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_{c2})^2}$$

Где $y_{c1} = b_1, y_{c2} = b_2 = 2b_1 - b_0, x_c = 0.5 \cdot L_x, b_0, b_1, b_2, M_x, \omega, R_0$ - параметры задачи.

Задача 3б (взаимодействие двух вертикальных вихрей, имеющих одинаковые направления).

Первый вихрь:

$$V_x = \begin{cases} - (y - y_{c1}) \omega, & r \leq R_0 \\ - (y - y_{c1}) \omega / \exp\left(\frac{r - R_0}{R_0}\right)^4, & r > R_0 \end{cases} \quad V_y = \begin{cases} + (x - x_c) \omega, & r \leq R_0 \\ + (x - x_c) \omega / \exp\left(\frac{r - R_0}{R_0}\right)^4, & r > R_0 \end{cases}$$

$$r_1 = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_{c1})^2}$$

Второй вихрь:

$$V_x = \begin{cases} - (y - y_{c2}) \omega, & r \leq R_0 \\ - (y - y_{c2}) \omega / \exp\left(\frac{r - R_0}{R_0}\right)^4, & r > R_0 \end{cases} \quad V_y = \begin{cases} + (x - x_c) \omega, & r \leq R_0 \\ + (x - x_c) \omega / \exp\left(\frac{r - R_0}{R_0}\right)^4, & r > R_0 \end{cases}$$

$$r_2 = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_{c2})^2}$$

Где $y_{c1} = b_1, y_{c2} = b_2 = 2b_1 - b_0, x_c = 0.5 \cdot L_x, b_0, b_1, b_2, M_x, \omega, R_0$ - параметры задачи (радиус такой же как в задачах 1, 2). В задачах 3а,б расчеты были сделаны без учета вязкости.

Все расчеты были сделаны на МВС-100К в Межведомственном вычислительном центре РАН.

4. Результаты вычислительных экспериментов.

На рис.4 представлены значения модуля скорости ($W = |\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ -слева) и давления в газе (P -справа) на момент времени $t=0$. Угловая скорость $\omega = 2.78 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$, $R_0 = 3,5948748 \text{ см}$, $\rho_0 = 8.02 \cdot 10^{-4} \text{ г/см}^3$, $L_x = 14.58 \text{ см}$, $L_y = 72,11136 \text{ см}$.

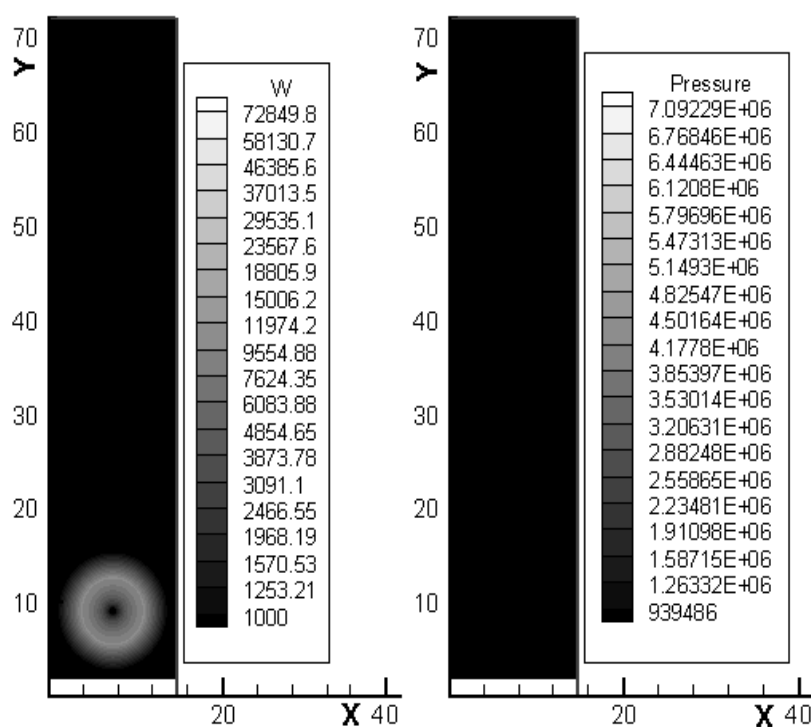


Рис.4. Начальные распределения модуля скорости (W) и давления в газе (P).

На рис.5 показаны поля ротора скорости ($curl=rot \vec{V}$) на различные моменты времени для случаев отсутствия и наличия вязкости (задачи 1 и 2). Далее, представлены результаты расчетов эволюции вихря без учета и с учетом вязкости. Были сделаны расчеты на сетках (83x402), (163x802), (323x1602) и (649x3202). С уменьшением шага по пространству точность расчетов возрастает, при этом заметна сходимость, то есть результаты последних двух расчетов отличаются незначительно. Ниже приведены результаты расчетов, выполненных на сетке (649x3202).

Видно, что влияние вязкости не велико. Это следует и из оценок. Действительно, число Рэйнольдса в нашем случае $Re=w_0 \cdot L_0 \cdot \rho_0 / \mu$, где $w_0=10^4$ см/с – масштаб скорости, $L_0=1$ см, $\rho_0=10^{-3}$ г/см³ – масштаб плотности газа за фронтом ударной волны $Re \sim 10^4 \gg 1$.

Поскольку влияние вязкости в рассматриваемом случае не существенно, то в последующих расчетах этим эффектом можно пренебречь. Из приведенных расчетов также следует, что при прохождении ударной волны вихри не разрушаются, а сносятся вместе с потоком, причем из-за сжатия газа ротор скорости увеличивается. Действительно, вихрь обладает механическим моментом движения, поэтому прохождение ударной волны приводит к его эволюции и к росту ротора скорости.

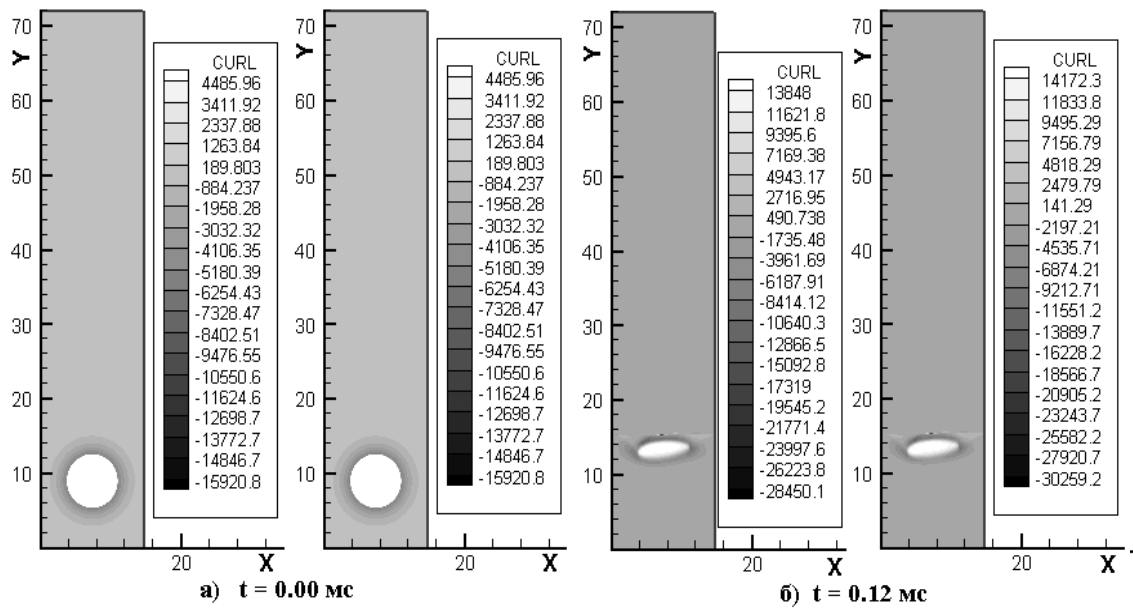
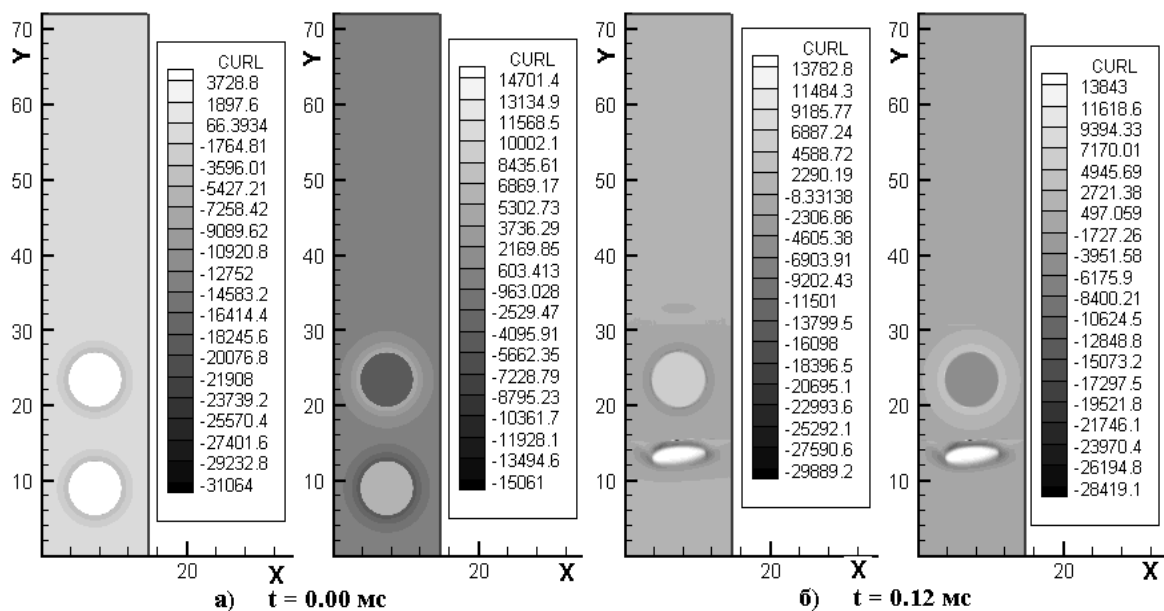


Рис.5. Начальные распределения поля роторов скорости (\vec{V}_{rot}) на моменты времени $t=0$ (а), $t= 0.12$ мс (б), $t= 0.48$ мс (с) и $t= 0.61$ мс(д) – момент, когда ударная волна достигает противоположной границы области. Слева – расчеты сделаны без учета вязкости, справа – с учетом вязкости.

На рис.6 показана эволюция системы из двух вихрей в том случае, когда они сонаправлены (левая часть рисунка – задача 3а) и в том случае, когда они имеют противоположные направления (правая часть рисунка – задача 3б).



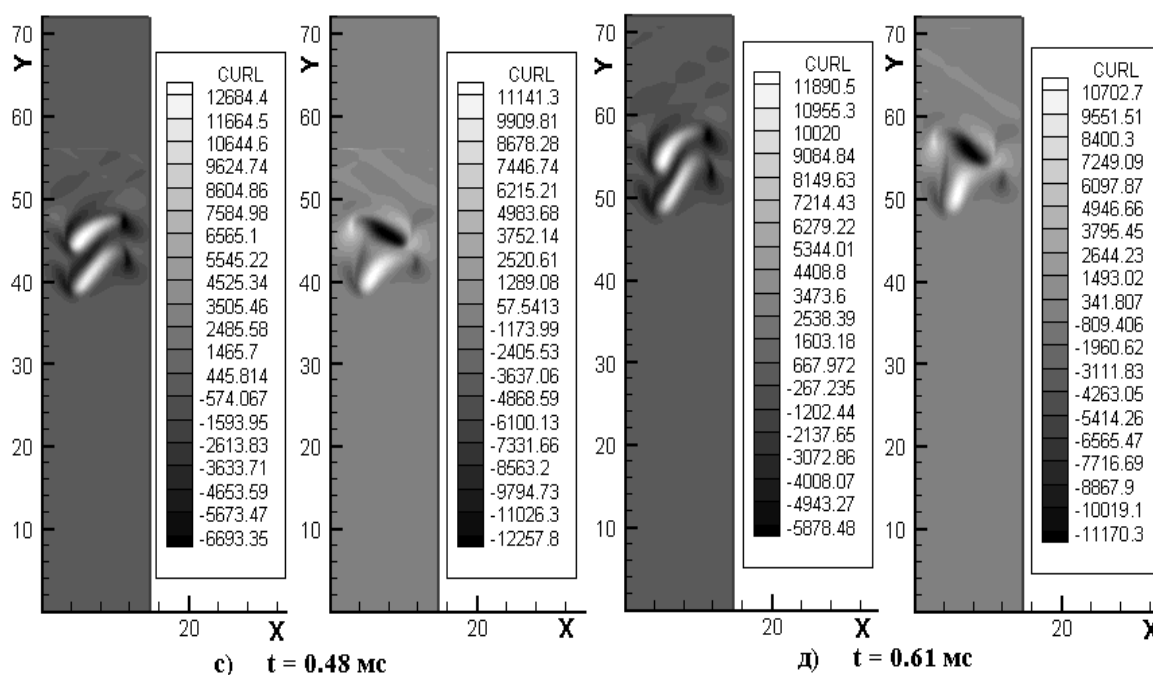


Рис.6. Взаимодействие системы вихрей с ударной волной. Слева – сонаправленные вихри, справа – вихри, направленные в противоположные стороны. $t=0$ (а), $t= 0.12$ мс (б), $t= 0.48$ мс (с) и $t= 0.61$ мс (д).

Таким образом, падающая ударная волна переносит вихри, причем их взаимодействие не приводит к разрушению и подавлению этих структур.

3. О возможности экспериментального исследования взаимодействия ударной волны с вихрями.

Можно ли непосредственно в натуральных экспериментах наблюдать описанные выше явления? Ранее [6] обсуждалась возможность формирования турбулентной высоко температурной плазмы при облучении пористых мишеней мощным лазерным импульсом. Интерес к такому состоянию вещества связан с тем, что при выполнении определенных условий можно получить плотную замагниченную термоядерную плазму в сжатой лазерной мишени, моделирующую «звездное вещество» [7]. Однако эксперименты с высокотемпературной лазерной плазмой являются дорогостоящими и требуют развития новых диагностик.

У одного из авторов статьи есть большой опыт сотрудничества с физиками, которые ставили эксперименты по взаимодействию ударных волн (или волн сжатия) с турбулентными слоями газа [8-9]. В настоящей статье мы предлагаем использовать подобный подход и в этом случае. А именно, провести эксперименты по взаимодействию ударной волны с вихрями на ударно-трубной установке.

Схема такого эксперимента показана на рис. 7. Внутри ударной трубы помещается металлическая сетка из тонких (с диаметром порядка микрометра) проволочек.

Соотношение толщины проволоки и размера ячеек между нитями должно быть подобрано так, чтобы не меняло по порядку величины среднюю плотность газа-плазмы, причем было прозрачным для оптических методов диагностики. Пропуская сильный токовый разряд можно взорвать эти проволочки и сформировать турбулентный слой, через который пройдет ударная волна.

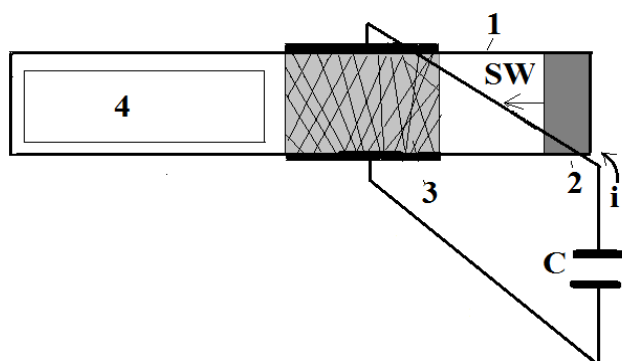


Рис.7. Схема установки для исследования эволюции турбулентного слоя под действием ударной волны. 1 – корпус ударной трубы, 2 – сжатый инертный газ, 3 – турбулентный слой, 3 – устройство для формирования турбулентного слоя, 4 – диагностическое окно, C – источник высокого напряжения, i – ток, SW – фронт ударной волны.

Мощный электрический разряд, пропущенный через мало плотную металлическую или полимерную сетку, приведет к ее сублимации и формированию нагретого газа. Пусть средняя плотность такой сетки $\bar{\rho} \sim 1 \text{ мг/см}^3$, и соответственно полная масса $m \approx 0,1 \text{ г}$. Тогда на ее нагрев и сублимацию потребуется энергия $E \sim 10-100 \text{ Дж}$.

Соответственно, давление пара ($p \leq \frac{(\gamma - 1) E}{\bar{V}}$, $\gamma = 5/3$, и объем $\bar{V} = m / \bar{\rho}$) будет порядка 1 атм, то есть много меньше, чем давление за фронтом ударной волны. Столкновение потоков от испаренных волокон приведет к сдвиговым течениям и формированию вихрей. Ударная волна будет переносить эти вихри с потоком, причем за счет сжатия ударной волной произойдет их интенсификация. Через диагностическое окно с помощью интерферометрии и других оптических методов можно изучать эволюцию такого слоя.

4. Основные результаты и обсуждение перспектив.

1. Проведены расчеты взаимодействия ударной волны с вихрями. Показано, что ударная волна не разрушает эти образования, а сносит их вместе с потоком. При этом ротор скорости возрастает при сжатии газа за фронтом ударной волны.

2. Наложение со-направленных и противоположно направленных вихрей не приводит к их компенсации, а к образованию новых сложных вихревых структур, которые переносятся потоком.

3. Оценки показывают, что на существующих экспериментальных установках можно провести исследования взаимодействия ударных волн с вихревыми структурами. Интерес к таким работам, обусловлен, в частности, исследованиями по лазерному термоядерному синтезу и моделированию «звездного вещества».

Список литературы:

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. – М.: Наука-Физматлит, 1997. –316 с.

2. Мадера А.Г., Акжолов М.Ж., Лебо И.Г. Моделирование развития процессов «конвекция плюс теплопроводность» в воздухе вблизи процессора // Труды НИИСИ РАН – М.: 2013. – т. 36 №1, ISSN 2225-7349 – с. 90-93.

3. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М., Метод крупных частиц в газовой динамике. – М.: Наука, 1982. –391с.

4. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. - М.: Наука, 1966. - 687 с.

5. Лебо И.Г., Тишкин В.Ф. Исследование гидродинамической неустойчивости в задачах лазерного термоядерного синтеза. Исследование гидродинамической неустойчивости в задачах лазерного термоядерного синтеза. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 304 с.

6. Лебо А.И., Лебо И.Г. О возможности диагностики спонтанных магнитных полей в турбулентной лазерной плазме. // Вестник МГТУ МИРЭА (MSTU MIREA Herald), (2014), №3(4), с. 215-221. <http://www.mirea.ru/science/vestnik-mirea>

7. Конаш П.В., Лебо А.И., Лебо И.Г. Моделирование переноса энергии заряженными термоядерными частицами в сжатых лазерных мишенях с учетом спонтанных магнитных полей.//Математическое моделирование (2015), 25(4), с.3-14.

8. Алешин А.Н., Гамалий Е.Г., Зайцев С.Г., Лазарева Е.В., Лебо И.Г., Розанов В.Б. Влияние взаимодействия ударной волны с областью контакта двух разноплотных потоков на интенсивность перемешивания. //Квантовая электроника (1987), 14(11), с.2299-2303.

9. Дмитриев О.А., Кривец В.В., Лебо И.Г., Симаков А.И., Титов С.Н., Чеботарева Е.И. Моделирование развития гидродинамической неустойчивости при прохождении волны сжатия через контактную поверхность двух газов. //Математическое моделирование (2013), 25(8), с.22-32