УДК 517.53.

ДОСТОВЕРНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПРЕДСТАВИМЫХ В ВИДЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА ИЛИ ФУРЬЕ

Павлов А.В., к.т.н., доцент, МГТУ МИРЭА, E-mail: a_pavlov@mirea.ru,
Москва, Россия

Аннотация. Приводятся разложения аналогичные тождествам Шеннона - Котельникова для функций, представимых виде преобразования Лапласа или преобразования Фурье на $(-a, a)$, позволяющие точно прогнозировать произвольные значения таких функций по значениям в целых точках 0,-1-,2,… .
Ключевые слова: преобразование Лапласа, преобразования Фурье, регулярность преобразования Лапласа, тождества Шеннона

EXACT PROGNOSIS OF THE FUNCTIONS IN LAPLACE ORE FOURIER FORM.

Pavlov A.V., PhD., ass.prof., MSTU MIREA, E-mail: a_pavlov@mirea.ru,
Moscow,Russia

Annotation. We consider the equalities such as the equalities of Shennon for the Laplace and Fourier transforms on (-a,a). The given equalities enable to us exactly to forecast the all values of the functions with help of only the values in the points 0,+1,+2,… . With help of the methods we obtain a results concerning the fullness of functions in spaces of Gilbert and a regularity of the Laplace transform in the area of the 0 point .
Key words: the transform of Laplace, the Fourier transforms, the regularity of transform of Laplace, Shennon equalities

Введение.

Большое количество реальных, функционирующих в непрерывном времени систем описывается в терминах преобразований Лапласа или интегральных представлений аналогичных спектральным представлениям . В данной статье рассматриваются методы ,[1-4], позволяющие прогнозировать точные значения функций при $t < 0$, пользуясь только значениями в дискретном наборе точек, совпадающем в теореме 1.1 и теореме 2.1 с точками 0,1,2… .

В первой части данной статьи доказывается тождество типа тождества Шеннона-Котельникова для функций представимых в виде преобразований Лапласа ,из которого следует явное представление значений таких функций при $x \in (-\infty, \infty)$, по значениям в целых точках 0,1,2,… , (тождество (1.1)) . Коэффициенты такого представления вычисляются в явной форме и одни и те же для разных функций.

Во второй части работы методами первой части доказываются аналогичные представления для спектральных представлений функций в $L_2[-a,a]$ при $0<a<\pi/3$, и при водится теорема 3.1 о полноте функций $e^{nx}, n=0,1,...$ в данном пространстве.

В теореме 4.1 приводится важное свойство двойного преобразования Лапласа о регулярности такого преобразования в открытой окрестности нуля, из которого вытекает полезное следствие о четности или нечетности нового класса функций преобразований Лапласа во всей комплексной плоскости (следствие 2 к теореме 4.1). Данный класс функций существенно отличается от класса целых функций, приведенного в известных теоремах о разложении ([1]). Аналогичные функции исследовались в статьях автора данной статьи ([5,6]).

1. Тождество типа Шеннона-Котельникова для преобразований Лапласа.

Теорема 1. 1 .

Пусть $r(t)=\int_0^\infty Z(u)e^{-ut}du.$

1. Если Z(x) произвольная функция с к не более чем конечным числом разрывов на $[0,\infty)$ такая, что $\int_0^\infty |Z(u)|du<\infty.$ то при всех $t\in[0,\infty)$ имеет место тождество

(1.1)
$$r(t)=\sum_{k=0}^{\infty}s(k)\sum_{m=0}^{k}C_k^m(-1)^{k-m}r(-m),$$
$$s(k)=t(t-1)...(t-k+1)/k!, t>0; s(0)=1.$$

2. Если $\int_0^\infty |Z(X)|e^{(K+1)X}dX<\infty.$, и функция Z(x) имеет непрерывную на $[0,\infty)$ производную К –ого порядка ,то при -$t\in[0,K)$, K=1,2,…, тождество (1.1) тоже выполнено.

(При целых положительных $t=N\in 0,1,...$, первая сумма в (1.1) заменяется на соответствующую конечную сумму по k от нуля до N и равна r(N)) .

Доказательство.

При $t\in 0,1,...$ теорема очевидна.

При всех $t>0, t\neq 1,2,...$, выполнено :

(1.2)

$$r(t)=\int_0^\infty[1+(e^{-u}-1)]^t Z(u)du=\int_0^\infty\sum_{k=0}^\infty s(k)(e^{-u}-1)^k Z(u)du=\sum_{k=0}^\infty s(k)\sum_{m=0}^k C_k^m(-1)^{k-m}\int_0^\infty e^{-mu}Z(u)du.$$

так как ряд под интегралом сходится равномерно [1]., и следовательно сумма может быть вынесена за знак интеграла.

При $t\in[0,K), K\in 1.2,...,$ где $[t]$ - целая часть числа $t, t\le[t]$, остаток ряда $(1+(e^{-u}-1))^{-t}$ под интегралом в (1.2) ввиду

|s(k+1)|=|(-t-1)(-t-2)...(-t-k)/k!|<(k+[t])!/k!([t]-1)!<
<(k+1)...(k+[t]),

оценивается

$$|\sum_{k=N}^\infty s(k+1)(1-e^{-u})^{k+1}|<|\sum_{k=N}^\infty (k+1)...(k+[t])(1-e^{-u})^k|=$$

$$=de^u r_{[t]}(u)/du, de^u r_m(u)/du=r_{m+1}(u), m=2,...,[t], r_2(u)=dr_1(u)/du, r_1(u)=\sum_{k=N}^\infty(1-e^{-u})^{k+[t]}.$$

После [t] интегрирований по частям в интеграле

$$\int_0^\infty\left|[1+(e^{-u}-1)]^t-\sum_{k=-1}^{N-1}s(k+1)(e^{-u}-1)^{k+1}\right|Z(u)du\le\int_0^\infty|(de^u r_{[t]}(u)/du)Z(u)|du=A(R)$$

получаем из условия теоремы 1 с учетом

$$|Z(x)^{(l)}|e^{(K+1)x}\to 0, x\to\infty, l=0,1,...,K,$$
$$\sum_{k=N}^\infty(1-e^{-u})^{k+[t]}=\left|\sum_{k=N}^\infty(1-e^{-u})^{k+[t]}\right|\le\sum_{k=N}^\infty(1-e^{-u})^k,$$

что $A(R)\to 0, R\to\infty.$

Так как в интеграле до R возможность вынести бесконечную сумму за знак интеграла очевидна ($|e^{-u}-1|\le|e^{-R}-1|$) ,то теорема 1 доказана.

2. Полнота системы функций $\mathrm{e}^{nx}, n=0,1,...$ в $L_2[-\pi,\pi]$ и регулярность преобразования Лапласа в нуле.

Приведем с учетом $|e^{-iu}-1|<q<1, u\in(-a,a)$ для спектральных разложений на (-a,a) очевидный аналог теоремы 1 в предыдущем параграфе.

Теорема 2.1.

Если $r(t)=\int_{-a}^{a} Z(u)e^{-uti}du, a=const., 0<a<\pi/3,$ то для такой функции $r(t)$ при всех $t\in(-\infty,\infty)$ выполнено разложение (1.1) теоремы 1 .

Доказательство повторяет простую часть доказательства теоремы 1 для $t>0,$ с учетом того, что при $|e^{-iu}-1|<q<1, u\in(-a,a), 0<a<\pi/3.$ и, следовательно, ряд под интегралом в (1.2) сходится равномерно ,[1], при любом фиксированном $t\in(-\infty,\infty).$

(при $t=N\in 0,1,...,$ первая сумма в (1.1) заменяется на соответствующую конечную сумму по k от нуля до N и равна r(N)) .

Из теоремы 2 вытекает теорема 3.

Теорема 3. 1.

Система функций $e^{nx}, n=0,1,...$ полна в $L_2[-a,a]$ при любом $0<a<\pi/3$.

Доказательство.

Из равенства нулю всех коэффициентов $b_k=0, k=0,1,...$, следует, что в разложении произвольной функции $f(x)$ из $L_2[-a,a]$ (такое разложение существует, но не единственно)

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{kxi}, x\in(-a,a),$$

все остальные коэффициенты $b_k=0, k=-1,-2,...$, так как из равенства (1.1) следует, что функция $r(t)$ тождественно равна нулю при всех t, в том числе при целых отрицательных t. Данное утверждение эквивалентно тому, что в $L_2[-a,a]$ не существует ненулевой по норме вектор-функции ортогональной каждой функции из линейного замыкания $L(\geq 0)$ функций $\mathrm{e}^{\mathrm{nx}}, \mathrm{n}=0,1,...$. По критерию полноты [2,стр.154] это означает, что любой ортонормированный базис построенный по $\mathrm{e}^{\mathrm{nx}}, \mathrm{n}=0,1,...,$ образует полную систему функций и $L(\geq 0)=L_2[\text{-a,a}]$.

Введем некоторые обозначения: $LZ(t)(\cdot)(x)=\int_0^{\infty} e^{-xt}Z(t)dt, x\in[0,\infty),$

$$L_+Z(t)(\cdot)(x)=\int_0^{\infty} e^{t}Z(t)dt, x\in[-\infty,0],$$

$$CoS(t)(\cdot)(x)=\int_0^{\infty}\cos xtS(t)dt, SiS(v)(\cdot)(x)=\int_0^{\infty}\sin xtS(t)dt, t\in[0,\infty).$$

$$F_{\pm}S(t)(\cdot)(p)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm pit}S(t)dt, p=x\in(-\infty,\infty),$$

$$F_{\pm}^{0}S(t)(\cdot)(p)=\int_{0}^{\infty}e^{\pm pit}S(t)dt,\ p=x\in(-\infty,\infty).$$

Теорема 4.1

Пусть функция $S_0(-z/i)$ регулярна в некоторой области $G(S)$, содержащей открытую окрестность нуля. Пусть $\{z:|z|<2a\}\in G(S)$.

Из непрерывности функции $S_0(t)$ при всех $t\in[0,\infty)$ и абсолютной сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}|S_0(t)|\,dt<\infty,$$

следует, что функции

$$R_{+}(z)=\int_{0}^{\infty}e^{zt}dt\int_{0}^{\infty}e^{itx}S_0(x-a)dx,$$

и

$$LLS_0(x-a)(\cdot)(z)=\int_{0}^{\infty}e^{-zt}dt\int_{0}^{\infty}e^{-tx}S_0(x-a)dx,$$

регулярны в открытой окрестности нуля $z:|z|<2a$, причем функция $R_{+}(z)$ регулярна при всех $z: Im\, z>-2a\bigcap G(S)$.

Доказательство.

Пусть $p=\lambda+iu,\lambda\in(-\infty,0),u\in(-\infty,\infty)$.

В интеграле

$$\int_{0}^{\infty}e^{pt}dt\int_{-\infty}^{-a}e^{txi}S_0(x)dx=$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{pt}dt\int_{-\infty}^{\infty}e^{txi}S_0(x)dx-\int_{0}^{\infty}e^{pt}dt\int_{-a}^{\infty}e^{txi}S_0(x)dx=$$

$$=L_{+}F_{+}S_0(x)(\cdot)(p)+[-\int_{0}^{\infty}e^{(p-ai)t}dt\int_{0}^{\infty}e^{txi}S_0(x-a)dx]=$$

первое слагаемое регулярно в области регулярности функции $S_0(-z/i)$, содержащей в себе открытую окрестность нуля, которая не зависит от a (данный факт широко известен и приведен, например, в работах [5,6]). Второе слагаемое вместе с исходным интегралом

$$\int_{0}^{\infty}e^{pt}dt\int_{-\infty}^{-a}e^{txi}S_0(x)dx=\int_{-\infty}^{-a}[-S_0(x)/(p+ix)]dx$$

регулярно при всех $p : Im\, p \in (-a,+\infty), a > 0$. Следовательно, второе слагаемое регулярно при всех $z = p - ai : Im\, z \in (-2a,+\infty)$, включающих в себя открытую окрестность нуля $|z| < 2a$.

Первая наиболее важная часть теоремы 4.1 доказана.

Регулярность в окрестности нуля двойного преобразования Лапласа следует ([3]) из равенства

$$LLS_0(x-a)(\cdot)(z) = \int_0^{+\infty} [S_0(x-a)/(z+x)]dx, z \in (0,+\infty),$$

которое, очевидно, остается верным при всех $Re\, z \neq (-\infty,0)$, если в качестве $LLS_0(x-a)(\cdot)(z)$ рассматривать его аналитическое продолжение, или

$$LLS_0(x-a)(\cdot)(iu) = \int_0^{+\infty} [S_0(x-a)/(iu+x)]dx =$$

$$= (1/-i)\int_0^{+\infty} [S_0(x-a)/(-u+xi)]dx =$$

$$= -(1/-i)\int_0^{\infty} e^{-ut}dt \int_0^{\infty} e^{itx} S_0(x-a)dx = (-i)R_+(-u), u \in (0,+\infty),$$

то есть, для аналитического продолжения данных функций ([3]), которое по доказанному существует при всех $|u| = |z| < 2a$ или при всех $Im\, z < 2a > 0$, выполнено :

$$LLS_0(x-a)(\cdot)(iz) = (-i)R_+(-z), |z| < 2a.$$

Теорема 4.1 доказана. (В данной теореме, очевидно, без изменения общности утверждение об регулярности в некоторой окрестности нуля $|z| < a$ остается верным, если в качестве $S_0(x-a)$ записать просто $S_0(x)$).

Следствие 1.

1 . В условиях теоремы 4.1 функция

$$R_-(z) = \int_0^{\infty} e^{zt}dt \int_0^{\infty} e^{-itx} S_0(x-a)dx,$$

регулярна в области симметричной области регулярности $R_+(z)$, то есть в области $z : Im\, z < 2a \bigcap G_-(S), G_-(S) = z : -z \in G(S)$, причем $|z| < 2a$ принадлежит данной области.

2. В условиях теоремы 4.1 без требования регулярности $S_0(x)$ в какой-либо области имеют место равенства

$$SiL(S_0(x-a))(\cdot)(p) = LCo(S_0(x-a))(\cdot)(p) = R_1(p),$$
$$CoL(S_0(x-a))(\cdot)(p) = LSi(S_0(x-a))(\cdot)(p), p \in [0,\infty).$$

Доказательство первого пункта сразу следует из равенства

$$R_-(z) = \int_0^\infty [-S_0(x-a)/(z-ix)]dx = R_+(-z), z \in (-\infty, 0),$$

полученного изменением пределов интегрирования в определении $R_-(z)$.

Второй пункт доказывается изменением порядка интегрирования в обеих частях равенства

$$F_+LS_0(x-a)(\cdot)(p) = iLF_-S_0(x-a)(\cdot)(p), p \in [0,\infty),$$

с помощью приравниванитя действительной и мнимой частей данного равенства.

Следствие 2 .

Если дополнительно к условиям теоремы 4.1 функция $S_0(-p)$ регулярна в некоторой открытой области $|Im\, p| < b > 0,$, содержащей в себе всю действительную ось, то при любой константе a такой , что $3a < b \;\; a > 0$ выполнено

$$R_1(-p) = -R_1(p), R_1(p) = \int_0^\infty e^{-pt}dt \int_0^\infty \cos tx S_0(x-a)dx, p \in C,$$

и

$$R_2(-p) = R_2(p), R_2(p) = \int_0^\infty e^{-pt}dt \int_0^\infty \sin tx S_0(x-a)dx, p \in C.$$

Доказательство.

Используем равенства

$$R_1(p) = 2[R_-(p) + R_-(p)], R_2(p) = 2i[R_-(p) - R_-(p)], p : (-2a < Im\, p < 2a) \bigcap G(S).$$

Далее, используем известные равенства пункта 2 следствия 1.

$$SiL(S_0(x-a))(\cdot)(p) = LCo(S_0(x-a))(\cdot)(p) = R_1(p),$$
$$CoL(S_0(x-a))(\cdot)(p) = LSi(S_0(x-a))(\cdot)(p), p \in [0,\infty).$$

С учетом теоремы 4.1 и пункта 1 следствия 1 получаем :

$$R_1(p) = (1/2i)[LL(S(x-a))(\cdot)(ip) - LL(S(x-a))(\cdot)(-ip)], R_2(p) = (1/2)[LL(S(x-a))(\cdot)(ip) + LL(S(x-a))(\cdot)(-ip)], p \in [0,\infty).$$

Следовательно ([3]), данное равенство выполнено в области совместной регулярности данных функций, включающей в себя по пункту 1 следствия 1 к теореме 4.1 область $p : |p| < 2a > 0$. Данные функции , соответственно, нечетны и четны в окрестности нуля $|p| < 2a > 0$ на действительной оси (и во всей этой окрестности ([1])) .

Функции $R_1(p)$ и $R_2(p)$ регулярны в некоторой открытой окрестности всей мнимой оси, не зависящей от a, в случае, когда функция $S(p-a)$ регулярна в некоторой открытой окрестности всей действительной оси $|Im(p-a)| < b < 2a$ и, соответственно, нечетна или четна. Заметим, что из регулярности функции $S(p-a)$ в некоторой открытой окрестности всей действительной оси $|Im\, p| < b < 2a$ следует регулярность сдвинутой функции $S(p)$ в той же области и наоборот (a действительно), следовательно $R_1(p)$ и $R_2(p)$ регулярны в некоторой открытой окрестности всей мнимой оси в условиях следствия 2 и теорема 4.1 верна .

Данный факт вместе с регулярностью и нечетностью или четностью в круговой окрестности нуля влечет утверждение следствия 2, ввиду совпадения функций $R_1(p)$ и $R_2(p)$ со своим нечетным и, соответственно, четным отражением относительно нуля ([1]).

Список литературы

1 Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного М.: Наука., 1987. – 688 с.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В.. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука.1976.- 544с.

3. Павлов А.В. Случайные ряды Фурье и их применение к теории фильтрации-прогноза. М.:Изд-во МГУ им.М.В.Ломоносова, механ.-математ.ф-т. 2000. ISBN 5-93839-002-8. -64 с.

4. Павлов А.В. Теорема типа больших уклонений для критерия хи-квадрат. М.: Успехи мат. наук. Т. 51, 1 (307), 1996.

5. Andrey Pavlov V. A new inversion formula for Laplace transforms and the notion of evenness. USA: Hor.Reser.pub. Univer.Jou.of appl.math.2014, v.2, № 3, pp. 148 - 152 .DOI:10.13189/ujam.2014.020305.

6. Andrey Pavlov V. The new inversion of Laplace transform. USA: David pub. Jour.of math. and sys.scien. 2014, № 4, pp. 197-201 .