УДК 004.27

О СОВМЕСТНОЙ МИНИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Антик М.И., доцент, E-mail: antik@mirea.ru
Виноградова В.А., аспирант, E-mail: vinogradova@ mirea.ru
МГТУ МИРЭА, Москва, Россия

Аннотация. Предлагается алгоритм минимизации многовыходной комбинационной схемы со структурой дизъюнктивной нормальной формы или конъюнктивной нормальной формой, отличающийся от известных методом вычисления всех максиинтервалов, из множества которых формируется окончательное решение. Сложность предлагаемого алгоритма не выше суммарной (по количеству функций) сложности алгоритма раздельной минимизации каждой из булевых функций.
Ключевые слова: булевы функции, минимизация дизъюнктивная нормальная форма, ДНФ, конъюнктивная нормальная форма, КНФ.

MINIMIZE ON JOINT SYSTEMS BOOLEAN FUNCTIONS

Antik M.I., associate Professor, E-mail: antik@mirea.ru
Vinogradova V.A., a graduate student, E-mail: vinogradova@mirea.ru
MSTU MIREA, Moscow, Russia

Abstract. Propose an algorithm to minimize multiple-output combinational circuit with a structure of the disjunctive normal form or conjunctive normal form, different from the known method of calculating all maksiintervalov, which is formed of a plurality of the final decision. The complexity of the proposed algorithm is higher than the total (number of functions) complexity of the algorithm to minimize each of the separate Boolean functions.
Keywords: Boolean functions, minimization of disjunctive normal form, DNF, conjunctive normal form, CNF.

1. Постановка задачи

Основные определения. Частично (не всюду) определённая булева функция φ(x[1..n]) определена на множестве двоичных наборов Ω={ω[1..n]}, |Ω|<2n. Это множество разбивается на два непересекающихся подмножества, которые обозначим T={α[1..n] | φ(α[1..n])=1} и F={β[1..n] | φ(β[1..n])=0}. Каждому из двоичных наборов αi[1..n]∈T соответствует единственная конъюнкция всех n переменных или отрицаний переменных Kni равная 1 только на этом наборе. Каждый из n элементов конъюнкции – литерал li[k]=x[k], если αi[k]=1, li[k]= x[k], если αi[k]=0. Набор αi[1..n]∈T или конъюнкцию Kni (в зависимости от контекста) называют конституентой единицы C1i. Аналогично, каждому из двоичных наборов βi[1..n]∈F соответствует единственная дизъюнкция всех n переменных или отрицаний переменных Dni равная 0 только на этом наборе. Каждый из n элементов дизъюнкции – литерал li[k]= x[k], если βi[k]=1, li[k]=x[k], если βi[k]=0. Инверсный набору βi[1..n]∈T набор $\bar{\beta}$i[1..n] или дизъюнкцию Dni (в зависимости от контекста) называют конституентой нуля C0i. Количество литералов в конъюнкции (дизъюнкции) называют рангом. Интервал это множество, объединяющее все двоичные наборы b[1..n] с одинаковыми значениями некоторых компонент. Таких наборов 2m, где m=(n-r), r ─ количество компонент с одинаковыми значениями (m называется мерностью интервала, r называется рангом интервала). Конъюнкция ранга r ≤ n накрывает единичный интервал из 2n-r наборов (конъюнкция равна 1 на этих и только этих наборах). Интервал (n-r)-мерности и конъюнкцию ранга r, накрывающую этот интервал, можно идентифицировать троичным набором, в котором r компонент это – константы {0,1}, соответствующие литералам, присутствующим в конъюнкции, и неизменяемым компонентам интервала. Остальные (n-r) компонент набора обозначаются символом «-». Эти компоненты соответствуют отсутствующим в конъюнкции литералам. Функцию, состоящую из одного литерала можно назвать конъюнкцией K1. Интервал ей соответствующий (n-1)-мерности накрывает ровно половину всех возможных наборов.

Минимальная дизъюнктивная нормальная форма (МДНФ) системы частично определённых булевых функций (зависящих от одних и тех же переменных) это минимальный набор конъюнкций минимального ранга, накрывающий все конституенты единицы всех функций и не накрывающий ни одну из конституент нуля ни одной из функций. (Ещё требуется правильное дизъюнктивное объединение набора конъюнкций, но эта часть конструкции МДНФ системы тривиальна.) С алгоритмической точки зрения удобнее работать не с конъюнкциями, а с интервалами. Тогда МДНФ это минимальный набор единичных интервалов максимальной мерности (максиинтервалов). Максиинтервал это интервал, который не содержится ни в каком другом интервале. В силу двойственности булевской структуры аналогичный текст можно сформулировать для МКНФ.

2. Минимизация

Минимизация состоит из двух этапов: первый этап – отбор всех возможных максиинтервалов, второй этап – выбор всех вариантов или хотя бы одного варианта накрытия всех конституент минимальным количеством максиинтервалов. Рассматриваемый алгоритм минимизации отличает от уже известных алгоритмов (минимизации одной функции) прежде всего первый этап, реализация которого и позволила перейти к совместной минимизации множества функций.

Первый этап минимизации (например, вычисление МДНФ). Составим прямоугольную таблицу, в которой столбцы и строки имеют по два заголовка.

Заголовками столбцов являются С1 и имена функций (удобнее для программной реализации характеристический вектор подмножества функций), в которых определена эта конституента.

Аналогично заголовки строк определяются конституентами нуля и именами функций, в которых эти конституенты определены. Клетки таблицы с координатами, в которых множества имён функций для С1 и С0 не пересекаются, остаются пустыми. В остальных клетках таблицы с координатами С1i×С0j запишем только совпадающие по значению компоненты. Например, 1010⊗0011=x01x. Каждая из этих оставшихся констант определяет интервал (n–1)–мерности, накрывающий С1i и не накрывающий С0j, а всё выражение трактуется как дизъюнкция этих интервалов.

Например, счётчик по модулю 10 с циклом (0,1,2,4,7,D,F,E,8,B). Таблица переходов счётчика будет следующей:

	1234	**C0**	**C1**
0000	0001	[123]	4
0001	0010	[124]	3
0010	0100	[134]	2
0100	0111	[1]	234
0111	1101	[3]	124
1101	1111		1234
1111	1110	[4]	123
1110	1000	[234]	1
1000	1011	[2]	134
1011	0000	[1234]	

Таблица первого этапа минимизации будет следующей:

	1110	**0010**	**0001**	**0000**	**1111**	**0111**	**1000**	**0100**	**1101**	
1011	1x1x				1x11	xx11	10xx		1xx1	[**1**]
0111		0x1x			x111	0111		01xx	x1x1	[**2**]
1000			x00x		1xxx		1000	xx00	1x0x	[**3**]
0000				0000		0xxx	x000	0x00	xx0x	[**4**]
1111	111x	xx1x	xxx1		1111	x111	1xxx	x1xx	11x1	[**123**]
1110	1110	xx10		xxx0	111x	x11x	1xx0	x1x0	11xx	[**124**]
1101	11xx		xx01	xx0x	11x1	x1x1	1x0x	x10x	1101	[**134**]
0001		00xx	0001	000x	xxx1	0xx1	x00x	0x0x	xx01	[**234**]
0100	x1x0	0xx0	0x0x	0x00	x1xx	01xx	xx00	100	x10x	[**1234**]
	1	**2**	**3**	**4**	**123**	**124**	**134**	**234**	**1234**	
	11— 1—0 –11–	0–1–	—01	—00	11–1	011– 01–1 0–11	1–0–	–10–	110– 1–01 –101	

01—

Теперь нужно найти все максиинтервалы, накрывающие одну C1i и не накрывающие ни какие C0, участвующие в определении функций, перечисленных в заголовке C1i. Для этого достаточно вычислить конъюнкцию всех дизъюнкций, записанных в клетках столбца, выполняя операции поглощения $a\&(a\vee b)=a$, и идемпотентности $a\&a=a$. Результат записать в виде ДНФ, оставив конъюнкции только минимального ранга. Каждая из минимальных конъюнкций будет содержать хотя бы по одному представителю из всех дизъюнкций, записанных в клетках столбца. Результат первого этапа – все максиинтервалы для всех конституент, или иначе – дизъюнкция конъюнкций минимального ранга для каждой из конституент единицы. В нижней части таблицы приведены найденные максиинтервалы.

В вычислительном плане этот этап экономнее выполнить как решение задачи о минимальном покрытии булевой матрицы.

Рассмотрим решение этой задачи в матричных терминах. Поскольку ориентировать матрицу можно по-разному, то вместо терминов строка и столбец будем использовать термин линия. Ортогональные друг другу линии озаглавим следующим образом:

Si – то, что должно быть покрыто, – линии, на которых расположены дизъюнкции в целом;

Pk – то, чем должны быть покрыты S, – ортогональные к Si линии, на которых расположены отдельные переменные (представители), входящие в дизъюнкции.

Решение ищется в следующей последовательности:

1. Формирование покрытия. Если на линии Si только один представитель Pk, то Pk заносится в формируемое покрытие, вычеркивается линия Pk и все линии S, покрываемые представителем Pk.

2. Поглощение линий S, не удовлетворяющих п.1. Если имеется пара линий Sy и Sx такая, что $Sy\subseteq Sx$, то линия Sx вычеркивается. Вычеркнуть линии P, не покрывающие не вычеркнутые линии S.

После многократного выполнения шагов 1и 2 либо получено решение, либо – «циклическая» матрица. Для «циклической» матрицы выполняется пункт Z.

Z. Для оставшихся n линий P генерируются все их сочетания (nk), начиная с k=1, добавляя их в решение и проверяя покрытие. Если для очередного k покрытие получено, то получают все покрытия для данного k и на этом процесс получения всех минимальных покрытий одной конституенты останавливается.

Результат первого этапа – все максиинтервалы для всех конституент, или иначе – дизъюнкции максиинтервалов для каждой из конституент.

Второй этап минимизации. Цель второго этапа выбрать из множества максиинтервалов, полученных на первом этапе, минимальное количество максиинтервалов, покрывающих все конституенты всех функций. Составляется модифицированная таблица Квайна. Заголовки столбцов этой таблицы и их количество такие же, как в первой таблице. Заголовками строк являются максиинтервалы со своими унаследованными из первого этапа именами функций. Одинаковые максиинтервалы в таблице представлены одной строкой. Строки и столбцы следует одинаково упорядочить в порядке возрастания количества функций так, чтобы на главной диагонали располагались прямоугольные матрицы, у которых строки и столбцы идентифицировались одними и теми же множествами имён функций. Клетки таблицы, расположенные под матрицами главной диагонали, в этом случае могут не рассматриваться. Не рассматриваются так же клетки с координатами, в которых множество имён строки не является подмножеством множества имён столбца.

1	2	3	4	123	124	134	234	1234		
1110	0010	0001	0000	1111	0111	1000	0100	1101		
1				1				1	11––	1
1						1			1––0	1
1				1	1				–11–	1
	2				2				0–1–	2
		3						3	––01	3
			4			4	4		––00	4
				123				123	11–1	123
					124				011–	124
					124				01–1	124
					124				0–11	124
						134		1-34	1–0–	134
							234	234	–10–	234
								1234	110–	1234
								1234	1–01	1234
								1234	–101	1234
					4		4		01––	4

Экстремальная задача точно такая же, как и на первом этапе. Отмечаются накрытия максиинтервалом остальных конституент.

Модифицированная таблица Квайна, в отличии от таблицы Квайна для одной функции, имеет расслоение по выходам для каждой из конституент.

Линиям Si соответствует вертикальная линия каждого выхода в каждой из конституент.

Линиям Pk соответствует горизонтальная линия (строка), отобранных на первом этапе максиинтервалов.

Правила алгоритма (см. выше) применимы только к линиям с одноимёнными выходами, но интервал, будучи выбран, покрывает конституенту, которая связана со многими выходами.

Если достаточно получить хотя бы один минимальный вариант, то следует добавить к двум пунктам третий. (3) Поглощение линий P. Если имеется пара линий Py и Px такая, что $Py \supseteq Px$, то линия Px вычеркивается.

После многократного выполнения шагов 1, 2 и 3 алгоритма либо получено решение, либо – «циклическая» матрица. Для «циклической» матрицы выполняется укороченный пункт Z – как только получено хотя бы одно минимальное покрытие процесс останавливается.

Если максиинтервал (максиинтервалы) накрывает конституенту, то из множества имён конституенты исключается множество имён максиинтервала (максиинтервалов). Затем пересчитывается набор максиинтервалов в первой таблице для этой конституенты. Если произошли изменения в этом наборе, то новые максиинтервалы включаются во вторую таблицу, заменяя предыдущее множество максиинтервалов столбца. В данном примере такое произошло в столбце (124). Произошедшие замены размещены в последних строках таблиц первой и второй.

Результат – 8 элементов с суммарным количеством входов равным 17. При раздельной минимизации получим 10 элементов с суммарным количеством входов равным 21. При раздельной минимизации также следует применять описанный алгоритм (с очевидными упрощениями) как лучший из известных формализуемых алгоритмов для частично определённых булевых функций.

Для вычисления МКНФ надо транспонировать таблицу первого этапа.

Если вычислительные затраты на минимизацию одной функции равны h, то вычислительные затраты при раздельной минимизации m функций равны hm. Вычислительные затраты рассматриваемого алгоритма $Q<hm$. Более того асимптотическая сложность $Q=O(h)$, т.е. чем больше функций, тем меньше относительные затраты. Разумеется, качество (количество элементов) совместной минимизации выше, чем раздельной.

Список литературы:

1. Горбатов В.А. и др. Теория автоматов. - М.: АСТ*Астрель,2008. – 559 с.
2. Фридман А., Менон П. Теория и проектирование переключательных схем. – М.: Мир, 1978 –580 с.
3. Антик М.И., Виноградова В.А. Минимизация нормальных форм множества частично определенных функций. // Сборник трудов IV Международной конференции «ИТ-Стандарт 2013», М.:TCDprint - 2013. - с. 315-323.