

УДК 004.9:539.1

## РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ГАЗАХ И ПЛАЗМЕ

**Лебо И.Г.**, д.ф.-м.н., профессор, E-mail: lebo@mirea.ru

**Симаков А.И.**, аспирант, E-mail: elkmar@newmail.ru

МГТУ МИРЭА, Москва, Россия

**Аннотация.** Ранее авторами было дано описание алгоритма расчета двумерных уравнений конвекции-диффузии и соответствующей программы “Cooler\_2D”. В настоящей статье представлены предварительные результаты численного решения уравнений конвекции-диффузии в трехмерной геометрии. Получены частные аналитические решения в случае нулевых значений скорости и для случая специальным образом подобранного поля скоростей.

**Ключевые слова.** Численное моделирование; уравнения конвекции-диффузии в трехмерной геометрии

## SOLUTION OF THE 3D EQUATION “CONVECTION-DIFFUSION” FOR MODELLING OF HEAT TRANSFER IN GASES AND PLASMA.

**Lebo I.G.**, D.of Sci., the professor, E-mail: lebo@mirea.ru

**Simakov A.I.**, the postgraduate student, E-mail: elkmar@newmail.ru

MSTU MIREA, Moscow, Russia

**Abstract.** Earlier authors have presented the description of the algorithm and “Cooler\_2D” code for numerical solution of 2D “convection-diffusion” equations. The preliminary results of numerical simulations of “convection-diffusion” equations in 3D geometry have been presented in this article. Particular analytical solutions of these equations have been derived for the cases when velocity equals zero, and when the velocity field has spatial form. The program “Cooler” is tested and results are obtained for three different types of boundary conditions.

**Keywords.** Numerical simulation, convection-diffusion in 3D geometry.

### Введение.

В [1,2] было дано описание алгоритма расчета двумерных уравнений конвекции-диффузии и программы “Cooler\_2D”, позволяющей находить приближенные решения этого уравнения методом конечных разностей в двумерной геометрии (координаты  $x$ ,  $y$ ,  $t$  – время). В настоящей статье дается описание трехмерной программы “Cooler\_3D”, и ее тестирование с помощью аналитических решений.

Уравнение конвекции-диффузии в дивергентной форме можно записать следующим образом

(  $div \vec{v} = 0$  ):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -div(\vec{v}T) + \nabla \left( \frac{\kappa}{c_v \rho} \nabla T \right) + F \quad (1)$$

где  $\vec{v}$  – вектор скорости,  $\kappa$  – теплопроводность,  $c_v$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме,  $\rho$  – плотность среды,  $F$  – внешний источник,  $T$  – искомая функция (например, температура в точке  $(x, y, z)$  в момент времени  $t$ ). Это – уравнение в частных производных второго порядка, причем первый член в правой части описывает снос искомой термодинамической функции (например, температуры) с потоком, второй член – распространение тепла за счет термодиффузии (теплопроводности). В том случае, если коэффициенты  $\kappa(T)$  или  $c_v(T)$  сами зависят от искомой функции  $T$ , уравнение (1) становится нелинейным.

В общем случае уравнение (1) не имеет аналитических решений, поэтому приходится разрабатывать алгоритмы и программы для моделирования соответствующих процессов.

В настоящей статье дан алгоритм решения трехмерного уравнения конвекции-диффузии и описание программы “Cooler\_3D”. Получены аналитические решения для частных случаев распределения скоростей в области расчета и специальным образом подобранных граничных условий. С помощью этих решений проведено тестирование программы “Cooler\_3D” и показано хорошее согласие расчетных и аналитических результатов.

#### Алгоритм решения трехмерных уравнений «конвекции-диффузии».

Перед написанием алгоритма решения было проведено обезразмеривание физических величин. Тогда при  $F=0$  уравнение (1) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x}(uT) + \frac{\partial}{\partial y}(vT) + \frac{\partial}{\partial z}(wT) + \chi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

где  $\vec{v}=(u, v, w)$  – компоненты вектора скорости по соответствующим направлениям,

$$\chi = \frac{\kappa}{C_v \rho} \cdot \frac{t_0}{L_0^2} \quad \text{– безразмерный параметр, характеризующий свойства среды.}$$

Чтобы обезразмерить уравнение (1) были использованы следующие масштабы величин: по пространству, по температуре, по скорости и по времени (обозначаются  $L_0$ ,  $T_0$ ,  $v_0$ ,  $t_0=L_0/v_0$  соответственно).

Для решения уравнения (2) использовалась неявная разностная схема, которая рассчитывалась с помощью прогонок при «расщеплении» по соответствующим направлениям [3]. При этом индекс “ $i$ ” соответствовал направлению вдоль оси  $OX$ , индекс “ $j$ ” вдоль оси  $OY$ , индекс “ $k$ ” – вдоль оси  $OZ$ . При переходе с нижнего временного

слоя на верхний вводилось два вспомогательных подуровня. Таким образом, на верхнем подуровне бралась температура только на том направлении, по которому велась прогонка (ниже в выражениях (3) значение на подуровнях помечено одной и двумя «черточками», а искомое значение на следующем временном слое обозначено «крышечкой»). В результате получим следующие выражения для процедуры трехточечной прогонки:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{T} - T}{\tau} &= \frac{1}{3} \chi (\Lambda_x \bar{T} + \Lambda_y T + \Lambda_z T) - \frac{1}{3} \left( \frac{\bar{u}_{i+\frac{1}{2}} \bar{T}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}} \bar{T}_{i-\frac{1}{2}}}{h_x} + \frac{v_{j+\frac{1}{2}} T_{j+\frac{1}{2}} - v_{j-\frac{1}{2}} T_{j-\frac{1}{2}}}{h_y} + \frac{w_{k+\frac{1}{2}} T_{k+\frac{1}{2}} - w_{k-\frac{1}{2}} T_{k-\frac{1}{2}}}{h_z} \right) \\ \bar{\bar{T}} - \bar{T} &= \frac{1}{3} \chi (\Lambda_x \bar{\bar{T}} + \Lambda_y \bar{T} + \Lambda_z \bar{T}) - \frac{1}{3} \left( \frac{\bar{u}_{i+\frac{1}{2}} \bar{\bar{T}}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{u}_{i-\frac{1}{2}} \bar{\bar{T}}_{i-\frac{1}{2}}}{h_x} + \frac{\bar{v}_{j+\frac{1}{2}} \bar{\bar{T}}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{v}_{j-\frac{1}{2}} \bar{\bar{T}}_{j-\frac{1}{2}}}{h_y} + \frac{\bar{w}_{k+\frac{1}{2}} \bar{\bar{T}}_{k+\frac{1}{2}} - \bar{w}_{k-\frac{1}{2}} \bar{\bar{T}}_{k-\frac{1}{2}}}{h_z} \right) \quad (3) \\ \hat{T} - \bar{\bar{T}} &= \frac{1}{3} \chi (\Lambda_x \hat{T} + \Lambda_y \bar{\bar{T}} + \Lambda_z \bar{\bar{T}}) - \frac{1}{3} \left( \frac{\hat{u}_{i+\frac{1}{2}} \hat{T}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{u}_{i-\frac{1}{2}} \hat{T}_{i-\frac{1}{2}}}{h_x} + \frac{\hat{v}_{j+\frac{1}{2}} \hat{T}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{v}_{j-\frac{1}{2}} \hat{T}_{j-\frac{1}{2}}}{h_y} + \frac{\hat{w}_{k+\frac{1}{2}} \hat{T}_{k+\frac{1}{2}} - \hat{w}_{k-\frac{1}{2}} \hat{T}_{k-\frac{1}{2}}}{h_z} \right) \end{aligned}$$

где  $\Lambda_x T = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h_x^2}$ ,  $\Lambda_y T = \frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{h_y^2}$ ,  $\Lambda_z T = \frac{T_{k+1} - 2T_k + T_{k-1}}{h_z^2}$ ,  $h$  – шаг по соответствующему направлению (отмечено индексом).

Таким образом, на одном временном шаге осуществляется три процедуры прогонки вдоль соответствующих направлений.

**Постановка первой тестовой задачи.**

Аналитическое решение уравнения (2) имеет следующий вид (при условии, что  $u=v=w=0$ ):

$$T = 1 + 10 \exp(-\lambda t) \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L} \sin \frac{\pi z}{L} \quad (4)$$

В этом случае используются граничные условия первого рода  $T|_{\Gamma} = T_0$ , где  $\Gamma$  – граница области. В нашем случае область – куб с ребром, равным 1 (после обезразмеривания).

**Постановка второй тестовой задачи.**

Условие второй тестовой задачи полностью аналогично предыдущему варианту, однако поле скоростей задано так, чтобы сводить конвекцию в области к нулю (выражение (5)): Это позволит проверить разностную схему с учетом конвективного члена, так как он будет отличен от нуля, в отличие от первой задачи.

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \\
 v &= v_0 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \\
 w &= w_0 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \\
 u_0 + v_0 + w_0 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

При расчетах использовались так же граничные условия первого рода.

**Результаты расчетов.**

Расчеты были выполнены на разностных сетках (26x26x26) и (52x52x52). На рисунке 1 представлена зависимость относительной погрешности

$$T_{nev} = e \frac{(T - T_{an})}{T_{an} N},$$

( $T, T_{an}$  – расчетное и аналитическое значения температуры,  $N$ - число ячеек) от времени при различных сетках для первой тестовой задачи, а на рисунке 2 – для второй. Как и ожидалось, при увеличении числа узлов сетки погрешность вычислений уменьшается. Идентичность результатов можно объяснить тем, что поле скоростей подобрано таким образом, чтобы оно не оказывало влияние на решение задачи.

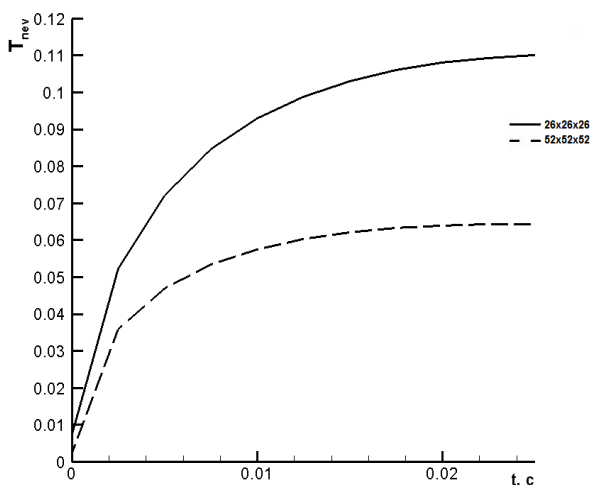


Рис. 1. Сравнение зависимостей невязки от времени для сеток 26x26x26 и 52x52x52 для первой тестовой задачи.

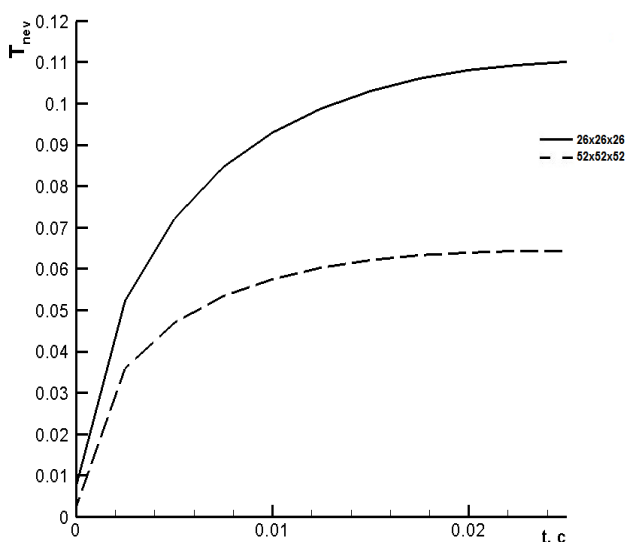


Рис. 2. Сравнение зависимостей невязки от времени для сеток  $26 \times 26 \times 26$  и  $52 \times 52 \times 52$  для второй тестовой задачи.

### Заключение

Разработана трехмерная программа “Cooler-3D”, моделирующая теплоперенос в высокотемпературных газах и плазме. Результаты расчетов показали удовлетворительное согласие с аналитическими решениями. В настоящее время ведется работа по распараллеливанию алгоритма счета и переходу на суперкомпьютер МВС-100К, так как ресурсы ПЭВМ не позволяют использовать большие разностные сетки.

### Список литературы

1. Симаков А.И., Лебо И.Г. Решение двумерного уравнения конвекции-диффузии применительно к задаче о теплообмене вблизи электронных устройств. // «INTERMATIC – 2013» / Материалы Международной НТК, 2-6 декабря 2013 г. Москва. - М.: МГТУ МИРЭА, 2013, ч. 1, с. 40-43.
2. Лебо И.Г., Симаков А.И. Решение уравнения «конвекция-диффузия» для моделирования теплопередачи в высокотемпературных газах и плазме. // Вестник МГТУ МИРЭА. - 2014, №3(4), с. 195-205.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977, - 656 с.